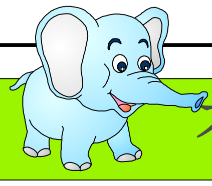
2019학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(나 형) 해설지

Epsilon



정답 및 해설

1) [정답] ④ (출제자 : 18 이현준)

[출제의도] 간단한 지수의 연산을 할 수 있는가?

[해설]

$4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^{2\times\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$

$2^0 = 1$

$\therefore\ 4^{\frac{3}{2}} \times 2^0 = 8 \times 1 = 8$

2) [정답] ⑤ (출제자 : 18 이현준)

[출제의도] 두 집합이 서로 같을 조건을 이해하여 두 집합의 원소를 비교할 수 있는가?

[해설]

$A=B$ 를 만족시킨다는 것은 두 집합 A 와 B 의 원소가 모두 같다는 것을 의미한다.

A 와 B 를 비교해보았을 때 두 집합에는 각각 4 가 공통으로 포함되어 있으므로, 다른 원소들을 비교해보자.

(i) $a=b-2$ 인 경우

집합 A 의 원소인 1 과 집합 B 의 원소인 5 는 서로 다르므로 이 경우는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=5$ 인 경우

집합 A 의 원소인 1 과 집합 B 의 원소인 $b-2$ 가 같다고 가정하면 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의해 $a=5$, $b-2=1$ 이므로 $a+b=8$ 이다.

따라서 구하는 값은 8 이다.

3) [정답] ③ (출제자 : 17 석진우)

[출제의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+3n+1}{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}$$

4) [정답] ③ (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 역함수의 정의를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 그림에서 $f(3)=6$ 이므로

역함수의 정의에 의하여 $f^{-1}(6)=3$ 이다.

$\therefore\ f^{-1}(6)=3$

5) [정답] ④ (출제자 : 18 이현준)

[출제의도] 주어진 함수의 그래프를 이용하여 좌극한과 우극한의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 함수의 그래프에서

$\lim_{x\to -2+} f(x) = 2$ 이고 $\lim_{x\to 1-} f(x) = 2$ 이므로

구하는 값은 $2+2=4$ 이다.

6) [정답] ③ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 독립사건의 개념을 알고 이를 활용할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$ 이고

두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ 이다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ 이다.

7) [정답] ① (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 표를 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

[해설]

32 명의 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 남성일 사건을 A,

동아리 Epsilon에 가입한 학생일 사건을 B 라 하자.

구하는 확률을 기호로 나타내면 $\mathrm{P}(B|A)$ 이므로

표를 이용하여 구해보면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{8}{32}}{\frac{20}{32}}=\frac{2}{5}\ \text{이다.}$$

8) [정답] ② (출제자 : 16 김민지)

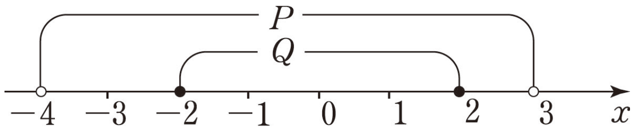
[출제의도] 필요조건에 대하여 이해하고 이를 활용할 수 있는가?

[해설]

조건 p 의 진리집합을 P, 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$P = \{x \mid -4 < x < 3\}$ 이고

$Q = \{x \mid -a \le x \le a\}$ 이다.



p 가 q 이기 위한 필요조건이 되기 위해선 $Q \subset P$ 이어야 하므로

$a < 3$ 이어야 한다.

조건을 만족하는 자연수 a 는 1, 2 이다.

따라서 자연수 a 의 최댓값은 2 이다.

9) [정답] ① (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 수열의 합($\sum$)의 개념을 잘 적용할 수 있는가?

[해설]

$\sum_{n=1}^{10} a_n(a_n+k) = \sum_{n=1}^{10}\left(a_n^{\,2}+ka_n\right) = \sum_{n=1}^{10} a_n^{\,2} + k\sum_{n=1}^{10} a_n$ 이고

$\sum_{n=1}^{10} a_n^{\,2} = 5$, $\sum_{n=1}^{10} a_n = 4$ 이므로

$\sum_{n=1}^{10} a_n(a_n+k) = 5+4k = 13$ 이다.

정리하면 $k=2$ 이다.

10) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 간단한 정적분의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$\int_0^a (x^3-1)\,dx = \frac{1}{4}a^4 - a = a$

위의 방정식을 풀면 $\frac{1}{4}a^4 - 2a = 0$ 이다.

정리하면 $a(a^3-8) = a(a-2)(a^2+2a+4) = 0$ 이고

이 방정식을 만족시키는 양수 a 의 값은 2 이다.

($\because$ $a^2+2a+4=0$ 의 두 근은 허수)

11) [정답] ③ (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 수식을 정리하면

$\log_a 2 \times \log_4 b = \log_a 2 \times \frac{1}{2}\log_2 b = \frac{1}{2} \times \frac{\log 2}{\log a} \times \frac{\log b}{\log 2}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\log b}{\log a} = \frac{1}{2}\log_a b = \frac{1}{8}$ 이므로 $\log_a b = \frac{1}{4}$ 이다.

이를 통해 $\log_b a$ 의 값을 구하면

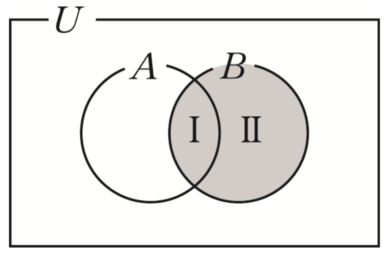
$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} = 4$ 이다.

$\therefore \log_b a = 4$

12) [정답] ① (출제자 : 18 김윤태)

[출제의도] 집합의 연산을 할 수 있는가?

[해설]



집합 B 가 어떤 원소를 갖는지 결정하기 위해 영역 I 의 원소 1 가지와 영역 II 의 원소들을 결정하여 각 경우의 수를 곱해주어 집합 B 의 개수를 구한다.

i) 집합 A 에서 영역 I 의 원소를 하나 고르는 경우는 3 가지

ii) 집합 $U-A$ 에서 영역 II 의 원소들을 고르는 경우

$\Rightarrow$ $U-A$ 의 원소 3 개가 각각 영역 II 에 각각 포함되는 경우와 포함이 되지 않는 경우의 2 가지 경우가 생기므로 총 경우는 $2^3=8$ 가지

$3 \times 8 = 24$ 이므로 모든 집합 B 의 개수는 24 이다.

13) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 유리함수의 최댓값을 이용하여 함수의 식을 구할 수 있는가?

[해설]

근호 안의 수는 음이 아닌 실수이어야 하므로

함수 $y = 2\sqrt{x-3}-1$ 의 정의역은 $\{x \mid x-3 \ge 0\}$, 즉 $\{x \mid x \ge 3\}$ 이다.

$f(x) = \frac{-2x+k}{x+1}$ $(k>0)$ 라 하면 $f(x) = \frac{k+2}{x+1} - 2$ 이고

$k+2>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $[3, \infty)$ 에서 감소한다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 $f(3) = -\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

$f(3) = \frac{k-6}{4} = -\frac{1}{4}$ 이므로 $k=5$ 이다.

14) [정답] ① (출제자 : 17 김도훈, 17 김동규)

[출제의도] 정규분포를 따르는 연속확률변수에 대한 확률밀도함수의 그래프의 대칭성을 이용하여, 주어진 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 등식의 좌변을 살펴보면

$\mathrm{P}(k \le X \le k+12) = \mathrm{P}(k \le X \le k+8) + \mathrm{P}(k+8 \le X \le k+12)$

이다. 마찬가지로 주어진 등식의 우변을 살펴보면

$\mathrm{P}(k-4 \le X \le k+8) = \mathrm{P}(k-4 \le X \le k) + \mathrm{P}(k \le X \le k+8)$

이다.

따라서 주어진 등식을

$\mathrm{P}(k-4 \le X \le k) = \mathrm{P}(k+8 \le X \le k+12)$ 로 볼 수 있다.

위의 등식의 좌변에서 $k-4$ 와 k 의 차이가 4 이고

우변에서 $k+8$ 과 $k+12$ 의 차이도 4 이다.

따라서 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 평균을 기준으로 좌우대칭인 종 모양의 그래프이므로 위의 등식으로부터 m 의 값이 $k-4$ 와 $k+12$ 의 평균이자 k 와 $k+8$ 의 평균인 $k+4$ 임을 알 수 있다. $\cdots$([보충] 참고)

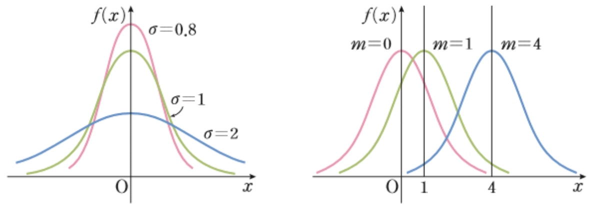
확률변수 X 의 평균이 $k+4$ 이고 표준편차가 4 이므로

구하는 값인 $\mathrm{P}(X \ge k+12)$ 를 표준화시키면

$\mathrm{P}(X \ge k+12) = \mathrm{P}(Z \ge 2) = 0.0228$ 이다.

[보충] 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009 개정 교육과정 확률과 통계 111p

정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 m과 σ의 값에 따라 그 모양이 정해진다.



$m=0$이고 σ의 값이 변할 때　　　$\sigma=1$이고 m의 값이 변할 때

일반적으로 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프에는 다음과 같은 특징이 있다.

① 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이고, 점근선은 x축이다.
② 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.
③ $x=m$일 때, 최댓값을 갖는다.
④ m의 값이 일정할 때, σ의 값이 커지면 곡선은 낮아지면서 양쪽으로 퍼지고 σ의 값이 작아지면 곡선은 높아지면서 뾰족하게 된다.
⑤ σ의 값이 일정할 때, m의 값이 변하면 대칭축의 위치는 바뀌지만 곡선의 모양은 같다.

15) [정답] ②　(출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 주어진 상황을 이해하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

양 끝에 놓인 숫자의 합이 4가 되는 경우는

$2+2$, $1+3$ 두 가지 경우뿐이다.

① 양 끝에 2, 2가 올 때:

나머지 5장의 카드가 1, 1, 1, 3, 3이므로 $\dfrac{5!}{2!\,3!}=10$

② 양 끝에 1, 3이 올 때:

나머지 5장의 카드가 1, 1, 2, 2, 3이므로 $\dfrac{5!}{2!2!}\times 2!=60$

따라서 총 경우의 수는 70이다.

16) [정답] ②　(출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 극한값을 가지는 조건과 미분의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$f(x)=a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots+a_nx+a_{n+1}$ $(a_1\neq 0)$이라 하자.

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}$의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{xf'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots+a_nx+a_{n+1}}{na_1x^n+(n-1)a_2x^{n-1}+\cdots+a_nx}$$
$$=\frac{a_1}{na_1}=\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$$

여기서 $n=2$이므로 $f(x)$는 이차함수임을 알 수 있다. 따라서

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$라 쓸 수 있다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{xf'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+c}{2ax^2+bx}=\dfrac{1}{2}$이다.

여기서 $\lim\limits_{x\to 0}(2ax^2+bx)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 0}(ax^2+bx+c)=0$이어야

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx+c}{2ax^2+bx}$의 값이 정의된다.

$\lim\limits_{x\to 0}(ax^2+bx+c)=c$이므로 $c=0$임을 알 수 있다.

다시 식을 정리하면 다음과 같다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax^2+bx}{2ax^2+bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+b}{2ax+b}=\dfrac{1}{2}$

여기서 $b\neq 0$이면 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+b}{2ax+b}=\dfrac{b}{b}=1$이 되므로 모순이고

$b=0$일 때 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax}{2ax}=\dfrac{1}{2}$로 조건을 만족시킴을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=ax^2$ $(a\neq 0)$이다.

$f(6)=36a$, $f(2)=4a$이므로 $k=\dfrac{36a}{4a}=9$이다.

17) [정답] ④　(출제자 : 17 박승용)

[출제의도] 등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

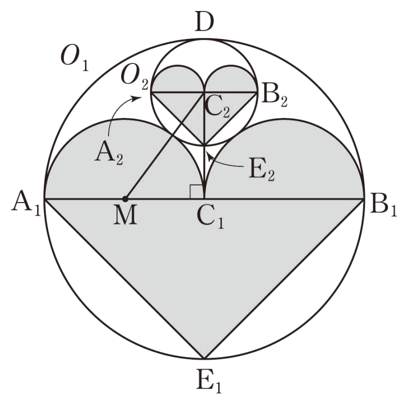
[해설]

선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 $\mathrm{B_1C_1}$을 지름으로 하는 반원의 넓이는

$\overline{\mathrm{A_1C_1}}=\overline{\mathrm{B_1C_1}}=1$이므로 각각 $\dfrac{1}{2}\times\pi\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{8}$이고

삼각형 $\mathrm{A_1B_1E_1}$의 넓이는 $2\times1\times\dfrac{1}{2}=1$ 이다.

따라서, $S_1=2\times\dfrac{\pi}{8}+1=\dfrac{\pi+4}{4}$이다.



선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{C_1MC_2}$이 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{MC_2}}^2=\overline{\mathrm{MC_1}}^2+\overline{\mathrm{C_1C_2}}^2$이 성립한다.

원 O_2의 반지름의 길이를 r라고 하면

$\overline{\mathrm{MC_2}}=r+\dfrac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{MC_1}}=\dfrac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{C_1C_2}}=1-r$이다.

따라서 $\left(r+\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+(1-r)^2$이 성립하므로 식을 정리하면

$r^2+r+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}+r^2-2r+1$에서

$3r=1$, 즉 $r=\dfrac{1}{3}$ 이므로

원 O_1과 원 O_2의 닮음비가 $3:1$이며 넓이비는 $9:1$이다.

$$\text{따라서 }\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{S_1\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{8}\times\frac{\pi+4}{4}\times\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}\right]$$
$$=\frac{9(\pi+4)}{32}\text{ 이다.}$$

18) [정답] ④ (출제자 : 14 임현우)

[출제의도] 시그마의 뜻을 이해하고 등차수열의 합 공식을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\sum_{k=1}^{16}(-1)^k a_k = 2$

$\Rightarrow -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{15} + a_{16} = 2$

$\Rightarrow (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \cdots + (-a_{15} + a_{16}) = 2$

$\Rightarrow 8d = 2$

$\Rightarrow d = \frac{1}{4}$

a_{2k} 는 $(a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots)$ 의 수열이므로

첫째항이 a_2 이고 공차가 $2d$, 즉 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이다.

따라서 a_{2k} 의 첫 번째 항부터 8 번째 항까지의 합을 등차수열의 합 공식을 이용하여 계산하면

$\sum_{k=1}^{8} a_{2k} = \frac{8\left(2a_2 + 7 \times \frac{1}{2}\right)}{2} = 4$ 이다.

$\Rightarrow 2a_2 + \frac{7}{2} = 1$

$\Rightarrow a_2 = -\frac{5}{4}$

$\therefore a_8 = a_2 + 6d = -\frac{5}{4} + \frac{6}{4} = \frac{1}{4}$

[별해]

$\sum_{k=1}^{16}(-1)^k a_k = 2 \Rightarrow -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{15} + a_{16} = 2 \quad \cdots (1)$

$\sum_{k=1}^{8} a_{2k} = 4 \Rightarrow a_2 + a_4 + \cdots + a_{16} = 4 \quad \cdots (2)$

$(2) - (1)$: $a_1 + a_3 + \cdots + a_{15} = 2 \quad \cdots (3)$

$(2) + (3)$: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15} + a_{16} = 6$

(1)에 의해 $d = \frac{1}{4}$ 이므로

$\Rightarrow \frac{16\left(2a_1 + 15 \times \frac{1}{4}\right)}{2} = 6$

$\Rightarrow 2a_1 + \frac{15}{4} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow a_1 = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow a_8 = a_1 + 7d = -\frac{3}{2} + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$

19) [정답] ⑤ (출제자 : 17 조영호)

[출제의도] 미분을 이용하여 다항함수의 개형을 파악할 수 있는가?

[해설]

조건 (나)에서 두 구간 $(0, 2)$, $(2, 4)$ 에서 $f(x)f(x+2) < 0$ 이므로 두 가지의 경우를 살펴볼 수 있다.

1) $0 < x < 2$ 에서 $f(x) < 0$ 인 경우

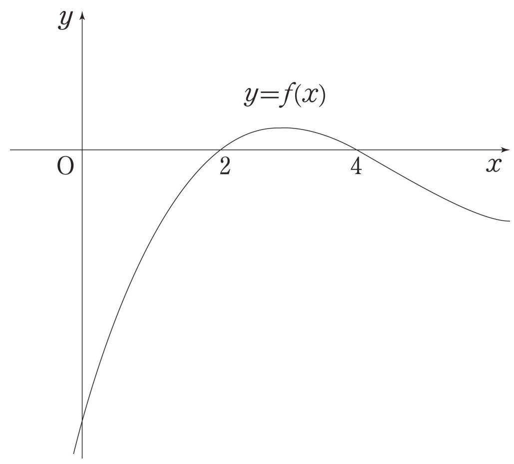
2) $0 < x < 2$ 에서 $f(x) > 0$ 인 경우

1)의 경우를 살펴보면 구간 $(0, 2)$ 에서 $f(x)f(x+2) < 0$ 이므로 $2 < x < 4$ 에서 $f(x) > 0$ 이고 마찬가지로 구간 $(2, 4)$ 에서 $f(x)f(x+2) < 0$ 이므로 $4 < x < 6$ 에서 $f(x) < 0$ 이다.

사이값 정리에 의하여 $f(2) = f(4) = 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 살펴보면

최고차항의 계수가 1 (양수)이므로 다음 그림과 같다.



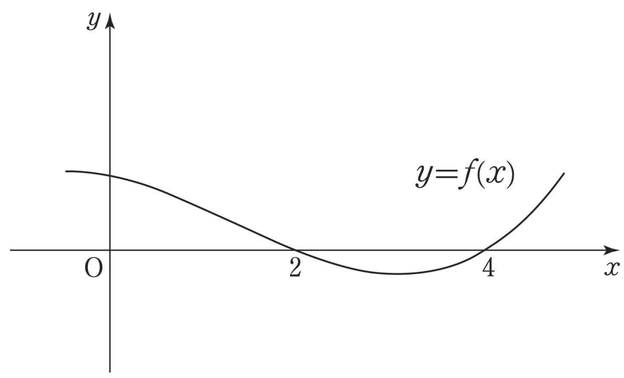
이 경우는 조건 (가)의 $f'(0) \le 0$ 을 만족시키지 못한다.

2)의 경우를 살펴보면 구간 $(0, 2)$ 에서 $f(x)f(x+2) < 0$ 이므로 $2 < x < 4$ 에서 $f(x) < 0$ 이고 마찬가지로 구간 $(2, 4)$ 에서 $f(x)f(x+2) < 0$ 이므로 $4 < x < 6$ 에서 $f(x) > 0$ 이다.

이에 따라 사이값 정리에 의하여 $f(2) = f(4) = 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 살펴보면

최고차항의 계수가 1 (양수)이므로 다음과 같다.



이 경우는 조건 (가)의 $f'(0) \le 0$ 을 만족시킬 수 있다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 위의 그림과 같다,

이에 따라 함수 $f(x)$ 는 극대와 극소가 되는 x 가 각각 1 개씩 존재한다.

그러므로 ㄱ과 ㄴ은 참이다.

ㄷ의 참, 거짓을 판별하기 위해

위에서 추론한 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형을 살펴보자.

함수 $f(x)$ 는 $x < 2$ 에서 극댓값을 갖고 $2 < x < 4$ 에서 극솟값을 가지므로 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ $(a < 2)$ 에서 극댓값을 갖고 $x = b$ $(2 < b < 4)$ 에서 극솟값을 갖는다고 하자.

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$x < a$	$x = a$	$a < x < b$	$x = b$	$x > b$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

조건 (가)에서 $f'(0) \le 0$ 이므로 $a \le 0$ 이다.
따라서 $f(a) \ge f(0)$, 즉 $M \ge f(0)$ 이다. (단, 등호는 $a=0$ 일 때 성립)
함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 이고 그래프가 두 점 $(2, 0)$, $(4, 0)$ 을 지나므로 $f(x) = (x-c)(x-2)(x-4)$ 라 할 수 있다. (단, c 는 상수)
$f'(x) = (x-2)(x-4) + (x-c)(x-4) + (x-c)(x-2)$ 이므로
조건 (가)에 의해 $f'(0) = 8 + 6c \le 0$, 즉 $c \le -\frac{4}{3}$ 이다.
이에 따라 $f(0) = -8c \ge \frac{32}{3}$ 이다.
따라서 $M \ge f(0) \ge \frac{32}{3}$ 이므로 ㄷ은 참이다.
∴ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20) [정답] ③ (출제자 : 18 안동우)
[출제의도] 각 상황에 맞는 경우의 수를 구할 수 있는가?

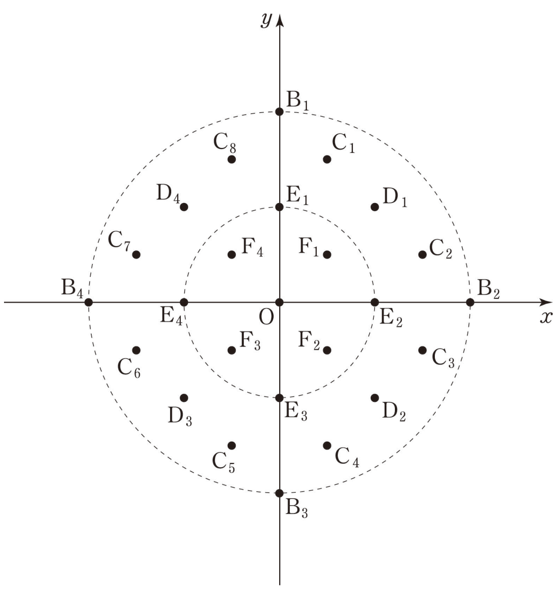
[해설]
x 축의 양의 방향으로 1 이동하는 것을 →,
x 축의 음의 방향으로 1 이동하는 것을 ←,
y 축의 양의 방향으로 1 이동하는 것을 ↑,
y 축의 음의 방향으로 1 이동하는 것을 ↓ 라 하자.

각 순서마다 이동할 수 있는 방향의 가짓수는 4 가지이고, 총 4 번 이동하므로 이동할 수 있는 전체 경우의 수는 $4^4 = 256$ 이다.

점 A 의 위치로 가능한 모든 곳을 아래의 조건에 따라 정하자.

점 B_n − 한 방향으로만 4 번 이동한 경우 (단, $n = 1, 2, 3, 4$)
점 C_n − 한 방향으로 1 번, 그 방향과 수직인 두 방향 중 한 방향으로만 3 번 이동한 경우 (단, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$)
점 D_n − 한 방향으로 2 번, 그 방향과 수직인 두 방향 중 한 방향으로만 2 번 이동한 경우 (단, $n = 1, 2, 3, 4$)
점 E_n − 한 방향으로 1 번, 반대 방향으로 3 번 이동한 경우 또는 한 방향으로 1 번, 반대 방향으로 1 번, 두 방향과 수직인 두 방향 중 한 방향으로만 2 번 이동한 경우 (단, $n = 1, 2, 3, 4$)
점 F_n − 한 방향으로 1 번, 반대 방향으로 2 번, 두 방향과 수직인 두 방향 중 한 방향으로만 1 번 이동한 경우 (단, $n = 1, 2, 3, 4$)
원점 O − 한 방향으로 2 번, 반대 방향으로 2 번 이동한 경우 또는 모든 방향으로 1 번 이동한 경우

각 조건에 따라 점 A 의 위치로 가능한 모든 곳을 표시하면 다음과 같다.



점 A 가 점 B_n 일 때 $t = 4$, 점 C_n 일 때 $t = \sqrt{10}$,
점 D_n 일 때 $t = 2\sqrt{2}$, 점 E_n 일 때 $t = 2$,
점 F_n 일 때 $t = \boxed{\sqrt{2}}$, 원점 O 일 때 $t = 0$ 이다.
따라서 가능한 t 의 값은 0, $\boxed{\sqrt{2}}$, 2, $2\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, 4 이다.
$t=0$, $t=2$, $t=4$ 일 때, 1 점을 획득하고
$t = \boxed{\sqrt{2}}$ 일 때, 2 점을 획득하고
$t = 2\sqrt{2}$, $t = \sqrt{10}$ 일 때, 3 점을 획득한다.

i) $X = 1$ 일 때
i −1) $t = 0$ 일 때
원점 O 에서 원점 O 로 이동하는 경우는 다음 괄호 안의 기호를 나열하는 경우와 같다.
(→, →, ←, ←), (↑, ↑, ↓, ↓), (→, ←, ↑, ↓)
따라서 $t = 0$ 일 때의 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{4!}{2!\,2!} + 4! = 36$ 이다.
i −2) $t = 2$ 일 때
원점 O 에서 점 E_1 으로 이동하는 경우는 다음 괄호 안의 기호를 나열하는 경우와 같다.
(↑, ↑, ↑, ↓), (→, ←, ↑, ↑)
따라서 $\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} = 16$ 가지이다.
원점 O 에서 점 E_1 이나 점 E_2, E_3, E_4 로 이동하는 경우의 조건은 서로 같으므로 각 점으로 이동하는 경우의 수는 동일하다.
따라서 $t = 2$ 일 때의 경우의 수는 $4 \times \left(\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!}\right) = 64$ 이다.
i −3) $t = 4$ 일 때
원점 O 에서 점 B_1 으로 이동하는 경우는 다음 괄호 안의 기호를 나열하는 경우와 같다.
(↑, ↑, ↑, ↑)
따라서 $\frac{4!}{4!}$ 가지이다.
원점 O 에서 점 B_1 이나 점 B_2, B_3, B_4 로 이동하는 경우의 조건은 서로 같으므로 각 점으로 이동하는 경우의 수는 동일하다.
따라서 $t = 4$ 일 때의 경우의 수는 $4 \times \frac{4!}{4!} = 4$ 이다.
따라서

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=1) &= \frac{1}{256} \times \left\{\left(4! + 2 \times \frac{4!}{2!\,2!}\right) + 4 \times \left(\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!}\right) + 4 \times \frac{4!}{4!}\right\} \\ &= \frac{1}{256} \times (36 + 64 + 4) \\ &= \frac{13}{32} \end{aligned}$$

이다.
ii) $X = 2$ 일 때
$t = \boxed{\sqrt{2}}$ 일 때
원점 O 에서 점 F_1 으로 이동하는 경우는 다음 괄호 안의 기호를 나열하는 경우와 같다.
(→, →, ←, ↑), (→, ↑, ↑, ↓)
따라서 $\boxed{\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!}}$ 이다.
원점 O 에서 점 F_1 이나 F_2, F_3, F_4 로 이동하는 경우의 조건은 서로 같으므로 각 점으로 이동하는 경우의 수는 동일하다.
따라서 $t = \boxed{\sqrt{2}}$ 일 때의 경우의 수는 $\left(4 \times \boxed{\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!}}\right)$ 이다.
따라서
$\mathrm{P}(X=2) = \frac{1}{256} \times \left(4 \times \boxed{\frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!}}\right) = \frac{3}{8}$ 이다.

iii) $X=3$ 일 때

$$\mathrm{P}(X=3)=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}$$
$$=1-\left(\frac{13}{32}+\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{32}$$

이다.

따라서 확률변수 X 의 평균 $\mathrm{E}(X)$ 는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{3}\{i\times \mathrm{P}(X=i)\}$$
$$=\boxed{1\times\frac{13}{32}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{7}{32}}$$
$$=\boxed{\frac{29}{16}}$$

따라서 $a=\sqrt{2}$, $b=24$, $c=\frac{29}{16}$ 이므로

$8a^2c-b=8\times(\sqrt{2})^2\times\frac{29}{16}-24=5$ 이다.

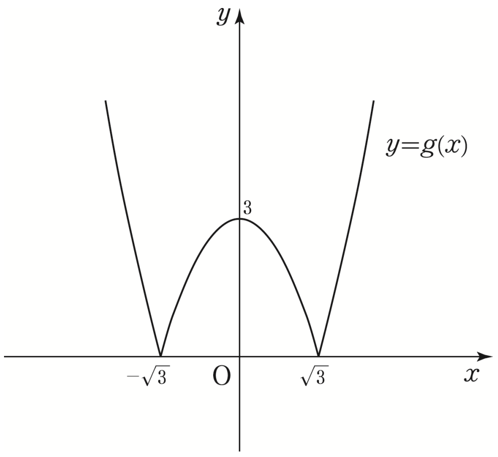
21) [정답] ④ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 합성함수의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$g(x)=t$ 로 치환하면 $g(x)=t$ 이고 $f(t)=4$ 를 만족하는 모든 실수 x 의 개수가 5 일 때를 찾으면 된다.

함수 $g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때 t 의 범위에 따라 $g(x)=t$ 를 만족시키는 x 의 개수를 찾아보자.

(1) $t=0$: 그래프에서 이를 만족시키는 x 의 개수는 2 이다.

(2) $0<t<3$: 그래프에서 이를 만족시키는 x 의 개수는 4 이다.

(3) $t=3$: 그래프에서 이를 만족시키는 x 의 개수는 3 이다.

(4) $t>3$: 그래프에서 이를 만족시키는 x 의 개수는 2 이다.

$f(t)=4$ 를 만족시키는 실수 t 의 개수가 1 이라면 방정식 $f(g(x))=4$ 를 만족시키는 x 는 최대 4 개고, $f(t)=4$ 를 만족시키는 실수 t 의 개수가 3 이상이면 방정식 $f(g(x))=4$ 를 만족시키는 x 는 최소 6 개다.

따라서 방정식 $f(g(x))=4$ 를 만족시키는 x 가 5 개가 되려면 $f(t)=4$ 를 만족시키는 실수 t 의 개수는 2 여야 한다. … ㉠

위의 (1) ~ (4) 중에서 t 를 2 개 고를 때, 만족시키는 모든 x 가 5 개가 되도록 고르는 방법은 <x 가 2 개일 때> + <x 가 3 개일 때>밖에 없다.

따라서 (1), (3) 을 고르거나 (3), (4) 를 고르는 방법밖에 없다.

Ⅰ) (1), (3) 을 고르는 경우

$f(0)=f(3)=4$ 이므로 $a=4$, $3b+c=4$ 이다. 또한 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로 $-2+a=2b+c$ 이고 $a=4$ 이므로 $2b+c=2$ 이다.

$3b+c=4$, $2b+c=2$ 에서 $b=2$, $c=-2$ 이다.

따라서 $a\times b\times c=4\times 2\times(-2)=-16$ 이다.

Ⅱ) (3), (4) 를 고르는 경우

$t=3$ 과 $t=k$ $(k>3)$ 에서 $f(t)=4$ 이므로 $f(3)=f(k)=4$ 이다.

따라서 $3b+c=kb+c=4$ 이고, 이 식에서 $b=0$, $c=4$ 이다.

$b=0$ 이므로 $t=k'$ $(k'>3)$ 에서도 $k'b+c=4$ 이니 $f(k')=4$ 이다.

이는 $f(t)=4$ 를 만족시키는 실수 t 의 개수가 3 이상이라는 것이고 이는 ㉠에 모순이다. 따라서 이 경우는 선택할 수 없다.

Ⅰ), Ⅱ)에서 세 상수 a, b, c 의 곱 $abc=-16$ 이다.

[별해] – 그래프 없이 식으로만 풀 경우

$g(x)$ 의 식에서 $g(x)=g(-x)$ 이므로 $f(g(x))=f(g(-x))$ 이다.

따라서 어떤 양수 k 에 대하여

$f(g(k))=4$ 이면 $f(g(-k))=4$ 이다. … ㉠

㉠에 의해 방정식 $f(g(x))=4$ 의 서로 다른 실근의 개수는 짝수가 되어야 할 듯한데 조건에서는 홀수라 나와 있다. 이는 ㉠에서 언급한 실수 k 가 $k=-k$ 를 만족시키는 경우가 하나 존재한다는 뜻이다.

따라서 $k=0$ 에서 $f(g(0))=4$ 이며, $k=0$ 이외에 양수 k 가 2 개 더 존재하면 서로 다른 실근의 개수가 5 개가 되어, 조건을 충족시킨다. … ㉡

$g(x)=t$ 로 치환하자.

이때 $f(g(x))=f(t)$ 이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(t)=\begin{cases}-t+a & (0\le t<2)\\ bt+c & (t\ge 2)\end{cases}$$

$g(x)=t=|x^2-3|$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $t\ge 0$ 이다.

따라서 $t=2$ 일 때를 기점으로 $f(t)$ 를 살펴보자.

㉠에 의해 모든 실수 x 에서 알아볼 필요 없이 $x\ge 0$ 에서만 알아보고 y 축에 대칭시키면 된다.

$|x^2-3|=2$ 를 만족시키는 양수 x 는 $x=1$, $x=\sqrt{5}$ 이다.

또한 $|x^2-3|=0$ 을 만족시키는 양수 $x=\sqrt{3}$ 이다.

이를 이용해 x 의 범위를 나눠보면 다음과 같다.

(1) x 가 구간 $[0, 1]$ 안에 존재하는 경우

(2) x 가 구간 $(1, \sqrt{3})$ 안에 존재하는 경우

(3) x 가 구간 $[\sqrt{3}, \sqrt{5})$ 안에 존재하는 경우

(4) x 가 구간 $[\sqrt{5}, \infty)$ 안에 존재하는 경우

(1), (4) 에서 $t\ge 2$ 이고 (2), (3) 에서 $0\le t<2$ 이다. … ㉢

$g(x)$, 즉 t 는 (1), (2) 에서 감소하고 (3), (4) 에서 증가한다. … ㉣

$f(x)$ 는 b 의 부호에 따라 증감 여부가 달라진다.

따라서 b 의 부호에 따라 $f(t)$ 가 조건을 만족하는지를 살펴보기로 하자.

Ⅰ) $b>0$

이때 $f(x)$는 $0 \le x < 2$에서 감소, $x \ge 2$에서 증가한다.

이 사실과 ㉢, ㉣을 이용하면 (1)~(4)의 범위에서 다음을 알 수 있다.

(1) t는 감소, $f(x)$는 증가 → $f(t)$는 감소

(2) t와 $f(x)$ 둘 다 감소 → $f(t)$는 증가

(3) t는 증가, $f(x)$는 감소 → $f(t)$는 감소

(4) t와 $f(x)$ 둘 다 증가 → $f(t)$는 증가

㉡에서 $f(g(0))=4$이므로 (1)의 범위에서 $f(t)=4$는 해 1개를 갖는다.

$f(g(\sqrt{5}))=f(2)<f(3)=f(g(0))$ $(\because b>0)$이고

(4)의 범위에서 $f(t)$는 증가하므로, (4)의 범위에서도 $f(t)=4$는 1개의 해를 갖는다.

위 사항과 ㉠에 의해 $f(g(x))=4$의 해 중 3개는 구해졌으니, (2), (3)의 범위에서 해를 1개 가져야 조건을 만족시킨다.

($\because$ (2), (3)의 범위에서 해를 1개 가지면 ㉠에 의해 1개 더 생겨서 5개)

이것이 가능한 경우는 (2)의 범위에서는 해가 존재하지 않고,

(3)의 범위 중 $x=\sqrt{3}$에서 해가 존재할 경우이다. (… [증명] 참고))

따라서 $f(g(\sqrt{3}))=f(0)=4$에서 $a=4$임을 알 수 있고

$f(g(0))=f(3)=4$에서 $3b+c=4$이다.

$f(x)$는 연속이므로 $x=2$에서 $2b+2=2$이며, 연립하면 $b=2$, $c=-2$임을 알 수 있다.

Ⅱ) $b=0$

이때 $f(x)$는 $0 \le x < 2$에서 감소, $x \ge 2$에서 상수함수이다.

이 사실과 ㉢, ㉣을 이용하면 (1)~(4)의 범위에서 다음을 알 수 있다.

(1) t는 감소, $f(x)$는 일정 → $f(t)$는 일정

(2) t와 $f(x)$ 둘 다 감소 → $f(t)$는 증가

(3) t는 증가, $f(x)$는 감소 → $f(t)$는 감소

(4) t는 증가, $f(x)$는 일정 → $f(t)$는 일정

㉡에 의해 $f(g(0))=4$이고 (1)의 범위에서 $f(t)$는 일정하므로

$0 \le x \le 1$인 모든 x에 대하여 $f(g(x))=4$이다.

따라서 $f(g(x))=4$를 만족시키는 실수 x가 무수히 많으므로 조건과 모순이다.

Ⅲ) $b<0$

이때 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 감소한다.

이 사실과 ㉢, ㉣을 이용하면 (1)~(4)의 범위에서 다음을 알 수 있다.

(1) t와 $f(x)$ 둘 다 감소 → $f(t)$는 증가

(2) t와 $f(x)$ 둘 다 감소 → $f(t)$는 증가

(3) t는 증가, $f(x)$는 감소 → $f(t)$는 감소

(4) t는 증가, $f(x)$는 감소 → $f(t)$는 감소

따라서 양의 실수 전체에서 $f(t)$의 증감 변화는 1번이다.

㉡에 의해 $f(g(0))=4$이고 (4)의 범위에서 $f(g(k))=4$인 k가 하나 존재하므로 방정식 $f(g(x))=4$의 서로 다른 실근은 3개이며, 이는 조건에 모순이다.

Ⅰ), Ⅱ), Ⅲ)에서 $b>0$일 때만 조건을 만족시키며, 이때 $a=4$, $b=2$, $c=-2$이다. 따라서 세 상수 a, b, c의 곱 $abc=-16$이다.

(Ⅰ)에서의 [증명])

(2) 또는 (3)의 범위에서 방정식 $f(g(x))=4$의 해를 1개는 가져야 하는 상황이다.

(2)의 범위와 (3)의 범위를 합치면 $(1,\ \sqrt{5})$이다. 이 범위 안에 있는 k에 대하여 $g(k)=p$이고 $f(p)=4$라고 하자.

$g(x)=|x^2-3| \ge 0$이므로 $p \ge 0$이다.

$p>0$인 경우와 $p<0$인 경우로 나누어 생각해보자.

<$p>0$일 때>

$|x^2-3|=p$에서 $x^2-3=\pm p$이며, $x^2-3=p$일 경우 $x=\sqrt{3+p}$, $x^2-3=-p$일 경우 $x=\sqrt{3-p}$이다.

k의 범위가 $1<k<\sqrt{5}$임을 생각하면, $0<p<2$이고 이에 따라 $1<\sqrt{3-p}<\sqrt{3}$, $\sqrt{3}<\sqrt{3+p}<\sqrt{5}$이다.

따라서 (2)의 범위에 들어가는 해인 $x=\sqrt{3-p}$와 (3)의 범위에 들어가는 해인 $x=\sqrt{3+p}$가 나오고 ㉠에 의해 $x=-\sqrt{3-p}$, $x=-\sqrt{3+p}$ 역시 해가 될 수 있으며 앞에서 (1), (4)의 범위에서 근을 3개 구했기 때문에 방정식 $f(g(x))=4$의 서로 다른 실근의 개수가 7이 된다. 이는 조건에 모순이다.

<$p=0$일 때>

위의 논리에서 $\sqrt{3-p}=\sqrt{3+p}=\sqrt{3}$이 된다.

따라서 (3)의 범위에 들어가는 해인 $x=\sqrt{3}$이 나오고

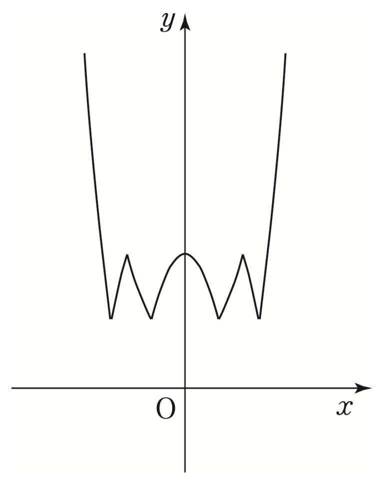
㉠에 의해 $x=-\sqrt{3}$ 역시 해가 될 수 있으며 앞에서 (1), (4)의 범위에서 근을 3개 구했기 때문에 방정식 $f(g(x))=4$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 된다.

따라서 $p=0$일 때, 다시 말해 $x=\sqrt{3}$에서 해를 가질 때만 조건을 만족시킬 수 있다.

[참고 1]

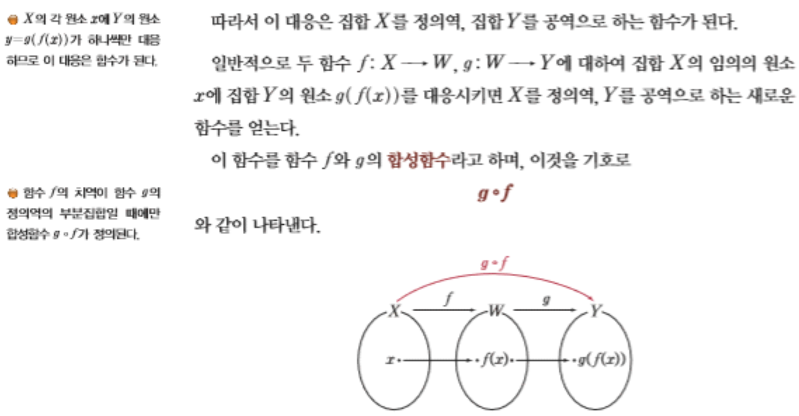
정답 상황의 그래프 개형을 나타내면 다음과 같다.

(Ⅰ)의 상황 중 (2), (3)의 범위에서 $x=\sqrt{3}$만을 해로 갖는 경우)



[참고 2]

<2009 개정 교육과정 수학 2> 81p, 신항균 외 11명, 지학사



X의 각 원소 x에 Y의 원소 $y=g(f(x))$가 하나씩만 대응하므로 이 대응은 함수가 된다.

따라서 이 대응은 집합 X를 정의역, 집합 Y를 공역으로 하는 함수가 된다.

일반적으로 두 함수 $f: X \longrightarrow W$, $g: W \longrightarrow Y$에 대하여 집합 X의 임의의 원소 x에 집합 Y의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역, Y를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻는다.

이 함수를 함수 f와 g의 **합성함수**라고 하며, 이것을 기호로

$$g \circ f$$

와 같이 나타낸다.

함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합일 때에만 합성함수 $g \circ f$가 정의된다.

22) [정답] 56 (출제자 : 17 김정빈)

[출제의도] 간단한 조합의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$${}_8C_3 = \frac{8\times7\times6}{1\times2\times3} = 56$$

23) [정답] 31 (출제자 : 18 이현준)

[출제의도] 간단한 다항함수의 미분을 할 수 있는가?

[해설]

$f(x) = 2x^2+7x+6$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x) = 4x+7$ 이다.

x 에 6 를 대입하면

$f'(6) = 4\times6+7$

$\quad = 31$

따라서 구하는 값은 31 이다.

24) [정답] 240 (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 이항정리를 이용하여 주어진 항의 계수를 구할 수 있는가?

[해설]

이항정리를 이용하여 다항식 $(1-2x^2)^6$ 의 일반항을 구하면

${}_6C_r\times(-2)^r\times x^{2r}$ $(0\le r\le 6)$ 이므로

이 다항식에는 짝수차항만 존재한다.

그러므로 주어진 x^9 의 계수를 구하는 것은

다항식 $(1-2x^2)^6$ 의 전개식에서 x^8 의 계수와

다항식 $(1+x)$ 에서 x 의 계수인 1 의 곱을 구하는 것과 같다.

다항식 $(1-2x^2)^6$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는

다항식 $(1-2x^2)^6$ 의 일반항인 ${}_6C_r\times(-2)^r\times x^{2r}$ 에서

$r=4$ 인 경우이다.

따라서 주어진 x^9 의 계수를 구하면 ${}_6C_4\times(-2)^4 = 15\times16 = 240$ 이다.

25) [정답] 41 (출제자 : 18 김성찬)

[출제의도] 함수의 연속에 대해 알고 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면

$\lim_{x\to1-} f(x) = f(1)$ 이다.

$\therefore\ 2 = 1+a+b\ \cdots$ ①

또한 $f(x) = f(x+2)$ 이므로

$f(0) = f(2) = \lim_{x\to2-} f(x)$ 이다.

$\therefore\ 1 = 4+2a+b\ \cdots$ ②

식 ①과 ②를 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=5$ 이다.

$\therefore\ a^2+b^2 = 41$

26) [정답] 27 (출제자 : 17 김정빈)

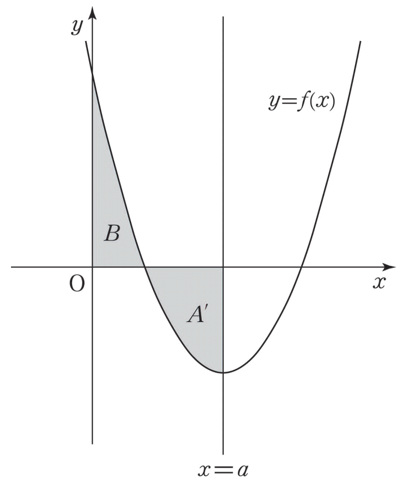
[출제의도] 정적분과 함수의 성질을 이용하여 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이와 적분의 관계를 파악할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=a$ 에 대해서 대칭이므로

도형 A 와 직선 $x=a$ 로 둘러싸인 도형 중 왼쪽 도형을 A' 이라 하면

A' 의 넓이는 A 의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 배이다. 이는 B 의 넓이와 같다.



B 의 넓이와 A' 의 넓이가 같으므로 $\int_0^a f(x)\,dx = 0$ 임을 알 수 있다.

정리하면

$$\int_0^a \{(x-a)^2-9\}\,dx = \int_0^a (x^2-2ax+a^2-9)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-9)x\right]_0^a = \frac{a^3}{3}-9a = 0$$

에서 $a^3-27a = a(a^2-27) = 0$ 이다.

$a>3$ 이므로 $a=3\sqrt{3}$ 이고, 따라서 $a^2=27$ 이다.

27) [정답] 16 (출제자 : 14 서재현)

[출제의도] 모집단과 표본집단 사이의 관계를 알고, 모평균의 추정을 할 수 있는가?

[해설]

농가에서 생산하는 레몬의 무게의 표준편차를 σ 라고 하면, 레몬의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$ 를 따른다.

이 농가에서 생산한 레몬 중 임의추출한 n 개의 레몬의 무게의 표본평균 $\overline{X}$ 는 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

표본평균 $\overline{X}$ 의 값을 $\overline{x}$ 라 하면

표본평균 $\overline{x}$ 와 표본표준편차 s 의 값이 32 임을 이용해서

모평균 m 에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간을 구할 수 있다.

모평균 m 에 대한 신뢰도 95% 의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이다.

표본의 크기가 충분히 크면 $\sigma = s$ 로 대체 가능하므로

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \overline{x}-1.96\times\frac{32}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\times\frac{32}{\sqrt{n}}$ 이다.

따라서 $a = \overline{x}-1.96\times\frac{32}{\sqrt{n}}$, $b = \overline{x}+1.96\times\frac{32}{\sqrt{n}}$ 이다.

$b-a = 2\times1.96\times\frac{32}{\sqrt{n}} = 3.92\times\frac{32}{\sqrt{n}} \le 31.36$ 을 만족하는

n 의 최솟값은 16 이다.

28) [정답] 12 (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 주어진 상황을 해석하고 그 확률을 계산할 수 있는가?

[해설]
맨 처음 상태에서 A 와 B 의 점수를 합하면 16 점이다.

A 와 B 의 점수의 합의 변화를 기준으로 볼 때, 한 번 게임을 하면 다음의 3 가지 경우가 가능하다.

(1) 진 사람의 점수가 4 점 이상일 경우
이긴 사람은 2 점을 얻고, 진 사람은 4 점을 잃으므로 A 와 B 의 점수의 합은 2 점 낮아진다.

(2) 진 사람의 점수가 2 점일 경우
이긴 사람은 2 점을 얻고 진 사람은 2 점을 잃으므로 A 와 B 의 점수의 합은 그대로이다.

(3) 진 사람의 점수가 0 점일 경우
이긴 사람은 2 점을 얻고 진 사람의 점수에는 변화가 없다.
따라서 A 와 B 의 점수의 합은 2 점 높아진다.

(1) 의 경우를 '-2', (2) 의 경우를 '0', (3) 의 경우를 '$+2$'라 하자.
게임을 4 번 한 결과 두 사람의 점수의 합이 16 점에서 10 점이 되었으므로 6 점이 감소했다.
만약 $+2$ 가 단 한 번이라도 있었다면, 남은 3 번 안에 8 점을 감소시켜야 하는데 이는 불가능하다.
따라서 주어진 상황에서 $+2$ 의 경우는 일어나지 않는다.
이제 -2 와 0 을 이용해 두 사람의 점수의 합을 6 점 감소시키면 된다.
이것이 가능한 경우는 -2 가 3 번, 0 이 1 번 있는 경우이다.

'0'이 1 번 있어야 하므로 2 점일 때 패배하는 순간이 1 번 있어야 한다.
따라서 최대 3 번의 게임을 거친 후 A 와 B 둘 중 한 명은 2 점이 되어야 하는데, 시작할 때 A 와 B 둘 다 8 점으로 시작하므로 게임을 1 번 또는 2 번 해서는 2 점을 만들 수가 없다.
3 번째 게임이 끝났을 때, 순서에 상관없이 1 승 2 패를 하면 2 점이 되고 마지막 4 번째 게임에서 2 점인 사람이 지면 조건을 충족시키게 된다.

A 가 2 점이 되는 경우로 생각해 확률을 계산하자.
3 번 게임을 한 결과 A 가 1 승 2 패가 될 확률은
${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$ 이고, 마지막 게임에서 A 가 질 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로
이때의 확률은 $\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$ 이다.

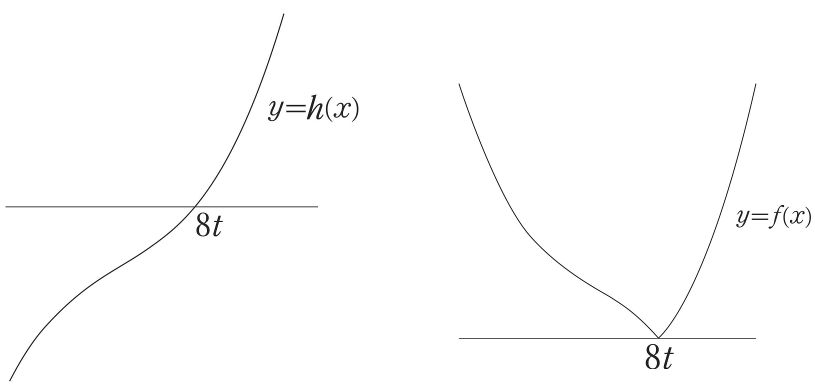
A 가 2 점이 되는 경우도 있지만 B 가 2 점이 되는 경우도 있으므로
$k = \frac{3}{16} \times 2 = \frac{3}{8}$ 이다.
따라서 $32k$ 의 값은 $32 \times \frac{3}{8} = 12$ 이다.

29) [정답] 5 (출제자 : 18 안동우)

[출제의도] 구간에 따른 함수의 그래프를 추론하여 극대 또는 극소를 구할 수 있는가?

[해설]
ⅰ) $h(x) = (x-8t)(x^2-4tx+16)$ 이라 하자.
$h'(x) = 3x^2 - 24tx + 16 + 32t^2$
$\frac{D}{4} = (12t)^2 - 3 \times (16 + 32t^2) = 48t^2 - 48$
ⅰ-1) $0 < t \le 1$ 일 때
$\frac{D}{4} \le 0$ 이므로 방정식 $h'(x) = 0$ 은 실근을 갖지 않거나 중근을 갖는다. 따라서 함수 $h(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 모두 갖지 않는다.
ⅰ-2) $1 < t$ 일 때
$0 < \frac{D}{4}$ 이므로 방정식 $h'(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 함수 $h(x)$ 는 극댓값과 극솟값을 하나씩 갖는다.
이때, $x = a_1$ 에서 극댓값을 가지고 $x = a_2$ 에서 극솟값을 갖는다고 하자.
ⅱ) $i(x) = x^2 - 4tx + 16$ 이라 하자.
$i(8t) = 32t^2 + 16 > 0$ 이므로 방정식 $i(x) = 0$ 은 방정식 $x - 8t = 0$ 과 공통근을 갖지 않는다.
따라서 방정식 $h(x) = 0$ 의 근의 개수는 (방정식 $i(x) = 0$ 의 근의 개수) $+1$ 이다.
방정식 $i(x) = 0$ 의 판별식을 구하면
$\frac{D}{4} = (2t)^2 - 16 = 4t^2 - 16$ 이다.
ⅱ-1) $0 < t < 2$ 일 때
$\frac{D}{4} < 0$ 이므로 방정식 $i(x) = 0$ 은 실근을 갖지 않는다.
따라서 방정식 $h(x) = 0$ 은 $x = 8t$ 에서만 한 실근을 갖는다.
ⅱ-2) $t = 2$ 일 때
$\frac{D}{4} = 0$ 이므로 방정식 $i(x) = 0$ 은
$x = \alpha$ $(\alpha \ne 8t)$ 에서 중근을 갖는다.
따라서 $h(x) = 0$ 은 $x = 8t$, $x = \alpha$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ⅱ-3) $2 < t$ 일 때
$0 < \frac{D}{4}$ 이므로 방정식 $i(x) = 0$ 은
$x = \beta$, $x = \gamma$ $(\beta, \gamma \ne 8t)$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $h(x) = 0$ 은 $x = 8t$, $x = \beta$, $x = \gamma$ 에서 서로 다른 세 실근을 가진다.
ⅰ), ⅱ)를 통해 다음과 같은 사실을 알 수가 있다.

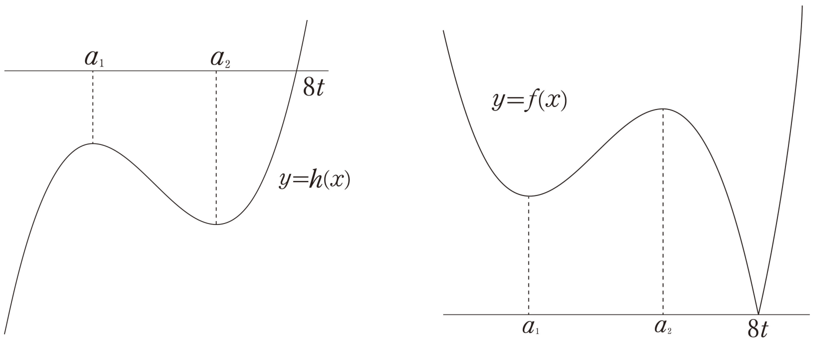
① $0 < t \le 1$ 일 때
함수 $y = h(x)$ 와 $y = f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는 $x = 8t$ 에서만 극솟값을 갖는다.

② $1<t<2$ 일 때

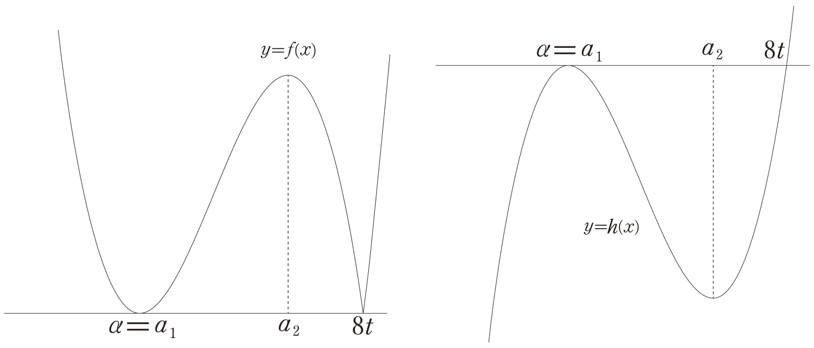
함수 $y=h(x)$ 와 $y=f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



따라서 $x=a_1$, $x=a_2$, $x=8t$ 에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

③ $t=2$ 일 때

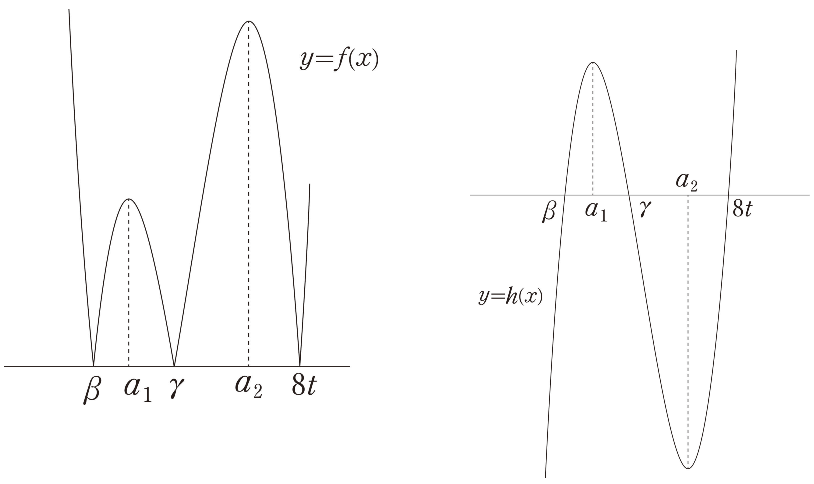
함수 $y=h(x)$ 와 $y=f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



따라서 $x=\alpha$, $x=a_2$, $x=8t$ 에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

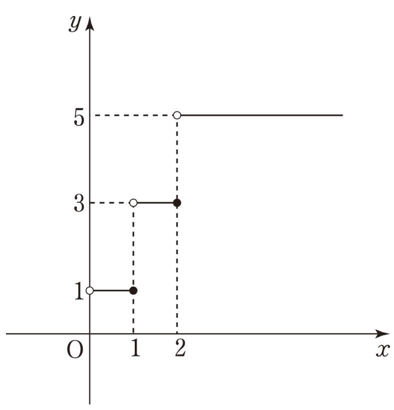
④ $2<t$ 일 때

함수 $y=h(x)$ 와 $y=f(x)$ 의 개형은 다음과 같다.



따라서 $x=\beta$, $x=\gamma$, $x=a_1$, $x=a_2$, $x=8t$ 에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

①, ②, ③, ④ 에 의해서 함수 $g(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $g(t)=mt$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이 되도록 하는 모든 실수 m 의 범위는 $\frac{3}{2}\leq m<\frac{5}{2}$ 이므로 방정식 $g(t)=mt$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3 이 되도록 하는 실수 m 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

$\therefore$ $p=2$, $q=3$ 이므로 $p+q=5$

30) [정답] 20 (출제자 : 18 안동우)

[출제의도] 주어진 조건과 평균값 정리를 응용하여 함수의 그래프를 추론할 수 있는가?

[해설]

사차함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로 함수 $f(x)$ 는 정수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[n, n+1]$ 에서 연속이고 열린 구간 $(n, n+1)$ 에서 미분가능하다.

따라서 평균값 정리에 의해서 $\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f'(c)$ 인 c 가 열린 구간 $(n, n+1)$ 에 적어도 하나 존재하므로 함수 $g(n)$ 의 최솟값은 1 이다. … ①

함수 $f(x)$ 는 사차함수이므로 $f'(x)$ 는 삼차함수이다. 따라서 $f(n+1)-f(n)=f'(c)=k$ 라 할 때, 삼차방정식 $f'(x)=k$ 는 서로 다른 실근을 최대 3 개 가질 수 있다.

따라서 $f(n+1)-f(n)=f'(c)$ 인 c 의 개수는 최대 3 개이므로 함수 $g(n)$ 의 최댓값은 3 이다. … ②

(나) 조건에서 방정식 $g(n)=n+1$ 을 만족시키는 서로 다른 정수 n 의 개수는 3 이다.

①, ② 에 의해 $1\leq g(n)\leq 3$ 이고

$n>2$ 일 때 $n+1>3$ 이고 $n<0$ 일 때 $n+1<1$ 이므로

두 열린 구간 $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$ 에서 방정식 $g(n)=n+1$ 을 만족시키는 정수 n 은 존재하지 않는다.

따라서 방정식 $g(n)=n+1$ 을 만족시키는 서로 다른 정수 n 의 개수가 3 이 되기 위해서는 $n=0$, 1 , 2 에서 방정식을 만족시켜야 한다.

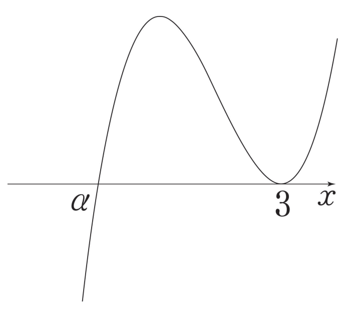
따라서 $g(0)=1$, $g(1)=2$, $g(2)=3$ 이다.

$g(1)=2$ 이므로 $f(2)-f(1)=f'(c)$ 을 만족시키는 모든 실수 c 의 개수는 2 이다.

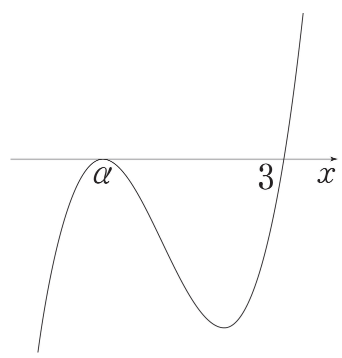
(가) 조건에 의해서 $c=3$ 일 때 $f(2)-f(1)=f'(c)$ 을 만족시키고 평균값 정리에 의해서 $f(2)-f(1)=f'(c)$ 를 만족시키는 $c=\alpha$ 가 열린 구간 $(1, 2)$ 에 존재한다.

따라서 방정식 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 실근은 $x=\alpha$, 3 뿐이므로 함수 $f'(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 개형을 가질 수 있다.

i) $x=\alpha$ 를 중근으로 가질 때



ii) $x=3$ 을 중근으로 가질 때



i)의 경우 닫힌 구간 $[1,2]$에서 $f'(x) \le 0$이므로
함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1,2]$에서 감소한다.
따라서 $f(2)-f(1)=0$을 만족시킬 수 없다.

ii)의 경우 방정식 $f'(x)=0$은 $x=3$을 중근으로 가지므로
함수 $f(x)$는 $(x-3)^3(x-a)+C$ 라는 것을 알 수가 있다. (단, a, C는 상수이고 $a \neq 3$이다.) … ([보충] 참고)
$f(2)-f(1)=0$이므로
$\{(2-3)^3(2-a)+C\}-\{(1-3)^3(1-a)+C\} = -7a+6=0$
따라서 $a=\frac{6}{7}$ 이므로 $f(x)=(x-3)^3\left(x-\frac{6}{7}\right)+C$
$\therefore f(0)-f(4)=\frac{162}{7}-\frac{22}{7}=20$

[보충]
$f(3)=C$, $h(x)=f(x)-C$라 가정하자. (단 C는 상수이다.)
$h(3)=f(3)-C=0$이므로 함수 $h(x)=(x-3)Q(x)$라 할 수 있다.
C는 상수이므로 $h'(x)=f'(x)=Q(x)+(x-3)Q'(x)$이다.
방정식 $f'(x)=0$은 $x=3$을 중근으로 가지므로
$f'(3)=h'(3)=0$이다.
$h'(3)=Q(3)=0$이므로 $Q(x)=(x-3)R(x)$라 할 수 있다.
$Q'(x)=R(x)+(x-3)R'(x)$이므로
$h'(x)=Q(x)+(x-3)Q'(x)$
$\quad=(x-3)\{2R(x)+(x-3)R'(x)\}$
방정식 $h'(x)=0$은 $x=3$을 중근으로 가지므로
$2R(3)+(3-3)R'(3)=2R(3)=0$이다.
최고차항의 계수가 1인 사차식을 최고차항의 계수가 1인 일차식으로 나눈 몫이 $Q(x)$이므로 $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이고, $Q(x)$를 최고차항의 계수가 1인 일차식으로 나눈 몫이 $R(x)$이므로 $R(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.
따라서 $R(3)=0$이므로 $R(x)=(x-3)(x-a)$라 할 수 있다.
$h'(x)=(x-3)\{2R(x)+(x-3)R'(x)\}$
$\quad=(x-3)^2\{3(x-a)+(x-3)\}$
방정식 $h'(x)=0$은 $x=3$을 중근으로 가진다.
즉, $3(3-a)+(3-3)=3(3-a)\neq 0$이므로 a는 3이 아닌 실수이다.
따라서 $f(x)=(x-3)^3(x-a)+C$이고 $a\neq 3$이다.