1. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=\alpha$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{2a_n-3}=3$이다. 상수 α의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

2. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=3,\ \lim_{n\to\infty}(2b_n-1)=3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

3. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n+2b_n)$의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

4. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n+1<a_n<2n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^2}{n^2+3}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{3}$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{6}$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}$의 값은?

① -1 ② -3 ③ -5
④ -7 ⑤ -9

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{2n-1}}-\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\right)$의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ -1
④ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_n=2n+1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$의 값은?

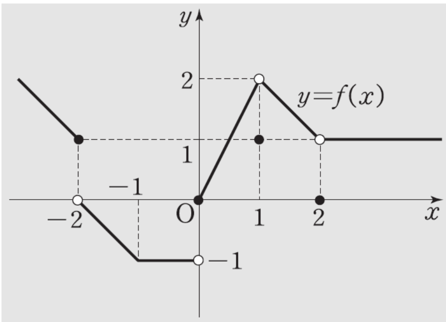
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

8. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2n}-1\right)=4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{3n+2}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1

④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

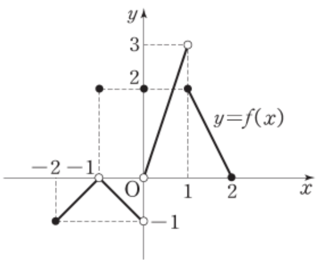
9. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to-1+}f(x-1)$의 값은?



① -2　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

10. 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,



$\lim_{x\to0+}f(x+1)+\lim_{x\to1+}f(x-1)$의 값은?

① 1　② 2

③ 3　④ 4

⑤ 5

11. 함수 $f(x)=\begin{cases}x+a & (x\le1)\\3x-a & (x>1)\end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재할 때, $\lim_{x\to2}f(x)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

12. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to1}f(x)=2,\quad \lim_{x\to1}\{f(x)g(x)\}=-2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to0}\frac{x-3}{g(x+1)}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

13. 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+ax+b}{x-2} & (x\ne2)\\2 & (x=2)\end{cases}$가 $x=2$에서 연속일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

14. 함수 $f(x)=\begin{cases}x+2a & (x<1)\\2x-a & (x\ge1)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{5}{6}$　⑤ 1

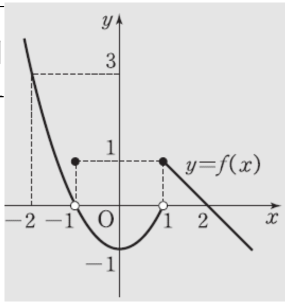
15. 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{x+1}}{x} & (x\neq 0) \\ b & (x=0) \end{cases}$이

$x=0$에서 연속일 때 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

16. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보기>

ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=0$

ㄴ. 함수 $f(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(x+1)f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 및 해설

1) [정답] ⑤

[해설]

$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=\alpha$에서

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-1)+1\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n-1)+\lim_{n\to\infty}1$

$=\alpha+1$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{2a_n-3}=3$에서

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{2a_n-3}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}1}{2\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}1}$

$=\dfrac{(\alpha+1)+1}{2(\alpha+1)-3}=\dfrac{\alpha+2}{2\alpha-1}=3$

이므로 $\alpha+2=3(2\alpha-1)$, $5\alpha=5$

따라서 $\alpha=1$

2) [정답] ⑤

[해설]

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=3$에서

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-2)+2\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n-2)+\lim_{n\to\infty}2$

$=3+2=5$

$\lim_{n\to\infty}(2b_n-1)=3$에서

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2b_n-1)+1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}(2b_n-1)+\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\times3+\dfrac{1}{2}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=5\times2=10$

3) [정답] ④

[해설]

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=1$에서

$c_n=2a_n-b_n$이라 하면 $b_n=2a_n-c_n$, $\lim_{n\to\infty}c_n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(2a_n-c_n)$

$=2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n$

$=2\times2-1=3$

따라서 $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n+2b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n+2\lim_{n\to\infty}b_n$

$=2\times3+2\times3=12$

4) [정답] ④

[해설]

모든 자연수 n에 대하여 $0<2n+1<a_n<2n+2$이므로

$$(2n+1)^2<(a_n)^2<(2n+2)^2$$

모든 자연수 n에 대하여 $n^2+3>0$이므로

$$\frac{(2n+1)^2}{n^2+3}<\frac{(a_n)^2}{n^2+3}<\frac{(2n+2)^2}{n^2+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)^2}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+8n+4}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=4$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(a_n)^2}{n^2+3}=4$

5) [정답] ④

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+2}-a_n}{a_na_{n+2}}$ 의 부분합은

$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+2}}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_3}\right)+\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_4}\right)+\left(\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_5}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)+\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_{n+2}}$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{6}$에서 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\dfrac{1}{6}$, $\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\dfrac{1}{6}$

이므로

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_k a_{k+2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$
$$=2+3-6-6=-7$$

6) [정답] ④

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{2n-1}}-\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k-1}{2k-1}}-\sqrt{\frac{k}{2k+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sqrt{\frac{0}{1}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)+\left(\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)+\left(\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\sqrt{\frac{n-1}{2n-1}}-\sqrt{\frac{n}{2n+1}}\right)\right\}$$
$$=-\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2n+1}}$$
$$=-\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2+\frac{1}{n}}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

7) [정답] ③

$a_n=2n+1$ 이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+n$$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+n=n^2+n$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+2k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

8) [정답] ⑤

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2n}-1\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2n}-1\right)=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left(\frac{a_n}{2n}-1\right)+2\right\}=2\times0+2=2$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{a_n}{n}+1}{3+\frac{2}{n}}$$
$$=\frac{2\times2+1}{3+0}=\frac{5}{3}$$

9) [정답] ④

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\to0-$일 때 $f(x)=-1$이므로

$$\lim_{x\to0-}f(x)=-1$$

$x\to1-$일 때 $f(x)\to2$이고, $x\to1+$일 때 $f(x)\to2$ 이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=2$$

$x\to-1+$일 때 $x-1\to-2+$이므로

$$\lim_{x\to-1+}f(x-1)=0$$

따라서

$$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to-1+}f(x-1)=-1+2+0=1$$

10) [정답] ②

[해설]

$x\to0-$일 때 $x+1\to-1+$이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x+1)=2$$

$x\to1+$일 때 $x-1\to0+$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x-1)=0$$

따라서 $\lim_{x\to0+}f(x+1)+\lim_{x\to1+}f(x-1)=2+0=2$

11) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\begin{cases}x+a & (x\le1)\\ 3x-a & (x>1)\end{cases}$ 에서

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x+a)=1+a$$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x+a)=3-a$

$\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하므로 $1+a=3-a$에서 $a=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 1) \\ 3x-1 & (x>1) \end{cases}$ 이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}(3x-1)=5$

12) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to1}f(x)=2,\quad \lim_{x\to1}\{f(x)g(x)\}=-2$에서

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to1}f(x)g(x)}{\lim_{x\to1}f(x)}=\frac{-2}{2}=-1$$

$x\to0$일 때 $x+1\to1$이므로 $\lim_{x\to0}g(x+1)=-1$

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{x-3}{g(x+1)}=\frac{-3}{-1}=3$

13) [정답] ①

[해설] 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$이다. 즉,

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=2 \quad \cdots$ ㉠

$\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로 $\lim_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$

따라서 $4+2a+b=0,\ b=-2a-4 \quad \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}=2$$

$\lim_{x\to2}(x+a+2)=a+4=2,\ a=-2 \quad \cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $b=(-2)\times(-2)-4=0$

따라서 $a+b=-2+0=-2$

14) [정답] ①

[해설] 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다. 즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=1+2a,\ \lim_{x\to1+}f(x)=2-a,\ f(1)=2-a$

이므로 $1+2a=2-a$

따라서 $a=\frac{1}{3}$

15) [정답] ⑤

[해설] 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{x+1}}{x} & (x\ne0) \\ b & (x=0) \end{cases}$이

$x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이다. 즉,

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{x+1}}{x}=b \quad \cdots$ ㉠

$\lim_{x\to0}x=0$이므로 $\lim_{x\to0}\left(\sqrt{3x+a}-\sqrt{x+1}\right)=0$

$\sqrt{a}-1=0,\ a=1 \quad \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} b&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3x+1}-(x+1)}{x\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}\right)} \\ &=\lim_{x\to0}\frac{(3x+1)-(x+1)}{x\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}\right)} \\ &=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}\right)} \\ &=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{2}{1+1}=1 \end{aligned}$$

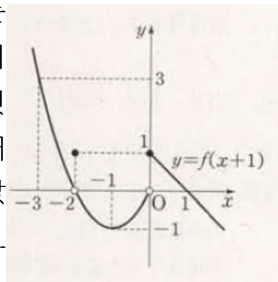
따라서 $a+b=1+1=2$

16) [정답] ④

[해설] ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=0,\ \lim_{x\to1-}f(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=0$ (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x+1)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x+1)$의 그래프는 그림과 같다. 이때 극한값 $\lim_{x\to0}f(x+1)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)



ㄷ. $h(x)=(x+1)f(x)$라 하면

$h(-1)=0\times f(-1)=0\times1=0$

$\lim_{x\to-1}h(x)=\lim_{x\to-1}(x+1)f(x)=0\times0=0$

따라서 $\lim_{x\to-1}h(x)=h(-1)$이므로 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

즉, 함수 $(x+1)f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[참고]

ㄷ. $f(-1)=1,\quad \lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 불연속이지만 $g(x)=x+1$이라 하면 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다. 이때 $g(-1)=0$이므로 함수 $g(x)f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.