대학수학능력시험 대비 포카칩 120제 (나형)

정답 및 해설

제작자 소개

문항 제작

이덕영 (연세대학교 수학과)
(1~22, 25~66, 79~113)
문호진 (인하대학교 의예과)
(23~24, 67~78, 114~120)

해설 제작

홍용기 (서울대학교 컴퓨터공학과)

해설을 시작하면서...

포카칩 120제 (나형)은 2009 개정 교육과정 대학수학능력시험을 대비할 수 있도록 만들어졌습니다. 물론 시험을 대비할 뿐만 아니라 수학 학습 전반에 도움이 될 수 있게끔 구성하였습니다.

문항 수는 적지만 풍부한 수학적 상황을 제시하였고, 따라서 다양한 관점으로 접근하면 충분한 학습 효과를 누릴 수 있을 것입니다. 대학수학능력시험 대비 교재이다 보니 문항 형식이 일관된 단점이 있습니다. 학습을 할 때에는 답을 내는 것에만 목적을 두기보다는 문항에서 제시된 상황을 다양한 방법으로 고민해보길 권합니다.

모든 문항은 2010~2016년에 만들어진 '포카칩 모의평가'에 수록된 문항 중 선별하였습니다. 이들의 문항은 이미 학교 수업 현장, 학원 등에서 다양하게 활용되었던 검증된 문항들입니다. 실제 평가원 모의고사 유독 유사했던 문항들도 많고 교육청 모의고사에서는 숫자만 다른 완전히 동일한 문항이 나온 적도 있었습니다.

이처럼 여기 있는 문항들이 실제로 출제에 참고가 되는 경우가 많으므로 특히 시험 대비에도 충분히 도움이 될 것입니다. 시험 대비의 관점에서, 특히 가형 응시자들은 포카칩 120제 (나형)도 가급적 풀어볼 것을 강력히 권장합니다.

우리나라 학생들은 어릴 때부터 시험을 보는 것이 공부의 유일한 목적인 경우가 많습니다. 저 역시도 다르지 않았던 것 같습니다. 그러나 오직 시험만을 위하여 공부하는 것은 교육적으로 긍정적인 현상이 아니며, 시험 대비에 큰 비용이 투자되는 것 역시 사회적으로 좋은 현상이 아닙니다.

이러한 이유 때문에 포카칩 136제 (가형)과 포카칩 120제 (나형)은 포만한 수학 연구소 (http://pnmath.kr)에서 PDF 파일을 무료로 제공하고 있습니다. 이 교재가 조금이나마 우리의 교육과 사회에 긍정적인 역할을 해주기를 간절히 바랍니다.

빠른 정답

1	26	41	④	81	38
2	②	42	6	82	①
3	⑤	43	7	83	49
4	③	44	②	84	⑤
5	⑤	45	④	85	①
6	②	46	①	86	①
7	44	47	④	87	②
8	55	48	②	88	③
9	⑤	49	③	89	28
10	①	50	21	90	①
11	③	51	50	91	④
12	②	52	①	92	④
13	31	53	⑤	93	⑤
14	16	54	③	94	③
15	8	55	42	95	③
16	46	56	①	96	②
17	60	57	⑤	97	86
18	299	58	②	98	75
19	34	59	③	99	④
20	46	60	28	100	④
21	484	61	⑤	101	37
22	⑤	62	②	102	⑤
23	192	63	④	103	144
24	70	64	16	104	②
25	②	65	⑤	105	140
26	③	66	18	106	⑤
27	34	67	③	107	①
28	④	68	③	108	②
29	⑤	69	④	109	③
30	⑤	70	②	110	530
31	100	71	28	111	④
32	185	72	③	112	⑤
33	⑤	73	⑤	113	③
34	②	74	152	114	⑤
35	①	75	④	115	13
36	①	76	②	116	①
37	⑤	77	56	117	④
38	14	78	⑤	118	①
39	16	79	⑤	119	16
40	③	80	144	120	65

정답 및 해설

해설

※ 해설지는 출제자의 의도와 완벽히 일치하지는 않을 수 있습니다.

1.

주어진 함수 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\text{는 짝수}) \\ 2x & (x\text{는 홀수}) \end{cases}$ 이면

$(f \circ f)(x)=\begin{cases} 2(x-1) & (x\text{는 짝수}) \\ 2x-1 & (x\text{는 홀수}) \end{cases}$이다.

① x가 짝수인 경우

$f(f(x))=n$의 근을 $x=2k$ $(k=1,2,3\cdots)$라고 표현하면 주어진 식은 $4k-2=n$이 된다.

즉, $n=2,6,10\cdots$ 일 때 한 개의 근을 갖게 된다.

② x가 홀수인 경우

$f(f(x))=n$의 근을 $x=2k-1$ $(k=1,2,3\cdots)$라고 표현하면

주어진 식은 $4k-3=n$이 된다.

즉, $n=1,5,9\cdots$ 일 때 한 개의 근을 갖게 된다.

* 어떤 x에 대해서도 n이 $4k$, $4k-1$인 경우에는 근이 나오지 않는다.

따라서 a_n은 각각의 n에 대한 $f(f(x))$의 근의 개수이므로

$a_{4k-3}=1$, $a_{4k-2}=1$, $a_{4k-1}=0$, $a_{4k}=0$ 이 되고 4번씩 순환하게 된다.

따라서, $\sum_{n=1}^{50} a_n=26$ 이다.

* 별해

$n=1$ 부터 직접 대입을 통해 규칙성을 찾아본다.

$f(f(x))=1$을 만족시키는 x의 값은 1이다. : $a_1=1$

$f(f(x))=2$를 만족시키는 x의 값은 2이다. : $a_2=1$

$f(f(x))=3$을 만족시키는 실근은 존재하지 않는다. : $a_3=0$

$f(f(x))=4$을 만족시키는 실근은 존재하지 않는다. : $a_4=0$

$\vdots$

$f(f(x))=n$을 만족시키는 실근의 개수는 $n=4k-3$꼴일 때 1개, $n=4k-2$꼴일 때 1개, $n=4k-1$꼴일 때 0개, $n=4k$꼴일 때 0개 이므로 $\sum_{n=1}^{50} a_n=26$이다.

2.

ㄱ. 정수가 아닌 유리수는 제곱해도 정수가 아닌 유리수이다. (거짓)

ㄴ.어떤 유리수가 $\frac{1}{10^k}$이면 $\log x$는 유리수이다. (참)

ㄷ. 어떤 양의 유리수를 $\frac{q}{p}$(p, q는 서로소)라고 했을 때 $2^{\frac{q}{p}}$가 무리수임을 보이면 된다.

$2^{\frac{q}{p}}$ (p, q는 서로소)가 유리수라고 가정하면 $2^{\frac{q}{p}}=\frac{s}{r}$($r$, s는 서로소)이다.

양변에 p제곱을 해주면 $2^q=\frac{s^p}{r^p}$이므로 $2^q r^p=s^p$이다.

$2^q r^p$이 짝수이므로, s^p 또한 짝수이다.

s가 짝수이면 $s=2^m\times n$꼴로 표현가능하다. (단, m는 자연수이고 n은 홀수)

만약, r이 짝수이면 r과 s는 서로소라는 조건에 모순이 되므로 r은 홀수이다.

r이 홀수라면 $2^q=2^{mp}$이다. 따라서 $q=tp$이다.

따라서 p와 q가 서로소라는 조건에 모순된다. (모순)

결론 : 정수가 아닌 양의 유리수 $\frac{q}{p}$에 대하여 $2^{\frac{q}{p}}$가 무리수이다.

$2^{\frac{q}{p}}$가 무리수이면 $2^{-\frac{q}{p}}$도 무리수이므로 모든 정수가 아닌 유리수 x에 대하여 2^x는 무리수이다. (거짓)

3.

ㄱ. $A_1=\varnothing$이므로 $A_2=\{\varnothing\}$이고,

$A_3=\{\{\varnothing\}\}\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$이다. (참)

ㄴ. $A_{n+1}=\{A_n\}\cup A_n$이므로 $A_n\subset A_{n+1}$이다.

$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots\subset A_{2017}$이다. (참)

ㄷ. $A_{n+1}=\{A_n\}\cup A_n$이므로 $A_n\in A_{n+1}$이다.

따라서, $A_{2016}\in A_{2017}$이다.

$A_k\in A_{2017}$ $(1<k<2017)$이라 할 때, $A_{k-1}\in A_{2017}$임을 보이자.

$A_{k-1}\in A_k$이고 $A_k\subset A_{2017}$이므로 $A_{k-1}\in A_{2017}$임을 알 수 있다.

따라서, 2017보다 작은 모든 자연수 k에 대하여 $A_k\in A_{2017}$이다. (참)

4.

공차가 1인 수열이므로 $a_n=a_1+n-1$이다.

$b_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$이 $k=14$일 때만 $|b_{k+1}|<|b_k|$성립한다.

$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|=|a_{k+1}|<1$ 이므로 $|a_{15}|<1$임을 알 수 있다.

$|b_{k+1}|<|b_k|$가 $k=14$에서만 성립하므로 $|b_{15}|<|b_{14}|$이다. 따라서 $\left|\frac{b_{15}}{b_{14}}\right|=|a_{15}|<1$이다.

① $-1<a_{15}<0$ 인 경우

$|b_{15}|<|b_{14}|$를 만족시키지만, $0<a_{16}<1$이 되어 $|b_{16}|<|b_{15}|$도 성립하므로 오직 $k=14$에서만 성립한다에 모순된다.

② $a_{15}=0$ $|b_{15}|<|b_{14}|$를 만족시키며 $k=14$ 일 때만 만족한다.

③ $0<a_{15}<1$ 인 경우

$|b_{15}|<|b_{14}|$를 만족시키지만 $-1<a_{14}<0$ 이므로$|b_{14}|<|b_{13}|$ 또한 만족시키게 되어 모순된다.

수열 a_n의 첫 번째 항은 $a_1=-14$이고 $a_n=n-15$이다.

따라서 등차수열 합에 의해 $\sum_{n=1}^{30} a_n=\frac{30(-14+15)}{2}=15$ 이다.

5. 주어진 식 $(2na_2-1)(2na_{n+1}-1)=1$의 좌변을 전개하면

$4n^2a_na_{n+1}-2n(a_n+a_{n+1})+1=1$ $(n\geq 1)$이고, 이 식을 정리하면,

$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}=2n$ $(n\geq 1)$이다. 따라서, 모든 자연수 k에 대하여

정답 및 해설

$\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{2k-1}}+\frac{1}{a_{2k}}\right)=2k^2\cdots$ (㉠)이고,

$\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{2k}}+\frac{1}{a_{2k+1}}\right)=$ (가) $\cdots$ (㉡)

(가) $=\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{k}2n=\frac{1}{2}+2k(k+1)$

$=\frac{1}{2}(2k+1)^2=f(k)$

㉠ $-f(k-1)=\frac{1}{a_{2k}}=2k-\frac{1}{2}=\frac{4k-1}{2}$ 이므로

$\therefore$ (나) $=\frac{1}{a_{2k}}=\frac{4k-1}{2}$

$f(7)+g(13)=\frac{225}{2}+\frac{51}{2}=138$

6. 준 식에 친밀도와 각 변수들을 대입하고 나눠보자.

$9E_1^2=3^3\times(\log_9 T_1+1)$, $\quad 9E_2^2=(2^3\times3^3)\times(\log_9 T_2+1)$

두 등식을 나누면 $\frac{9E_1^2}{9E_2^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{\log_9 T_1+1}{\log_9 T_2+1}$ 이다.

주어진 조건에 의해 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{E_1}{E_2}=\frac{1}{3}$ 이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{\log_9 T_1+1}{\log_9 3T_1+1}$ 이고 $3T_1=T_2$임을 통해

$\frac{8}{9}=\frac{\log_9 T_1+1}{\log_9 3T_1+1}$ 을 알 수 있다.

$8\log_9 3T_1+8=9\log_9 T_1+9$

$\log_9(3T_1)^8-\log_9(T_1)^9=1$ $\qquad\therefore\ \log_9\frac{3^8}{T_1}=1$, $T_1=3^6$이다.

7. $a_{n+1}+b_n=2$ 이므로 $a_4+b_3=2$, $a_5+b_4=2$, $a_6+b_5=2$ 이다.

따라서, $a_3+b_6=16$ 과 만나면

$(a_3+b_3)+(a_4+b_4)+(a_5+b_5)+(a_6+b_6)=22$

임을 알 수 있다.

$a_n+b_n=c_n$ 이라 할 때, $c_3+c_4+c_5+c_6=22$ 이고,

$c_1+c_8=c_2+c_7=c_3+c_6=c_4+c_5$ 이다.

그러므로, $\sum_{n=1}^{8}(a_n+b_n)=2\times22=44$ 이다.

8.

$a_1=7$이고 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1 & (a_n\geq0)\\ a_n+k & (a_n<0)\end{cases}$ 임에서 a_n이 양수인 동안

수열 a_n이 1씩 감소하다가 -1이 되는 순간 다시 어떠한 값인

$k-1$로 순환될 것을 생각해볼 수 있다.

a_1부터 주어진 수열을 따라가면 $7,6,5,4,3,2,1,0,-1,k-1$ 이 된다.

즉, a_n은 처음 9항을 제외하고 k값에 따라 $k+1$개의 항마다

반복되는 주기를 갖는 수열이 된다.

$[7,6,5,4,3,2,1,0,-1],[k-1,k-2,\cdots 1,0,-1]$

a_{10}부터 $(k+1)$의 주기를 갖게 되므로 주어진 조건 $a_{16}=a_{23}$ 또한 한 주기의 간격을 갖게 되는 것이므로 16항과 23항은 정확히 $k+1$의 간격이 된다. 따라서 $23-16=k+1$ 로 $k=6$ 임을 알 수 있다.

따라서, 수열

$\{a_n\}$: $(7,6,5,4,3,2,1,0,-1),(5,4,3,2,1,0,-1),(5,4,3,2,1,0,-1)\cdots$

이고 $\sum_{n=1}^{20}a_n=55$가 된다.

9. 등차수열 합 공식 $S_n=\frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$에서

$a_1=2$, $n=9$, $S_9=54$를 대입하면 $d=1$임을 알 수 있다.

다시 위의 등차수열 합 공식에 a_1, d, n을 대입하면 $S_8=44$이다.

10.

$\begin{cases}a_{n+1}=3a_n+2b_n+1\\ b_{n+1}=2a_n+3b_n-1\end{cases}$ 의 두 식을 더하면

$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$이다.

즉, 수열 (a_n+b_n)은 공비가 5인 등비수열임을 알 수 있다.

$a_1+b_1=5$이므로 $a_n+b_n=5^n\cdots$ (가) 이다.

주어진 두 수열을 빼면 $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$로 공차가 2이며

초항이 1인 등차수열이다.

$a_n-b_n=2n-1\cdots$ (나) 이다.

따라서, $f(n)=5^n$, $g(n)=2n-1$이고 $f(8)\times g(13)=5^{10}$이다.

11.

ㄱ. $x\in A$이면 $x\in B$이고, $x\in B$이면 $x\in C$이다.

따라서 $A\subset C$이다. (참)

ㄴ. $A\subset B\cap C$는 $x\in A$이면 $x\in B\cap C$라는 뜻이다.

$x\in B\cap C \Leftrightarrow x\in B$이고 $x\in C$이므로,

$A\subset B\cap C$이면 $A\subset B$이고 $B\subset C$이다. (참)

ㄷ. (반례) $A=\{1,3,4\}$, $B=\{1,2,3\}$, $C=\{2,3,4\}$라 하면,

$A\subset B\cup C$이지만 $A\not\subset B$, $A\not\subset C$이다. (거짓)

12.

a_n은 a_9까지는 계속 증가하다가 a_{10}에서 1로 줄어든다.

즉 $a_{10}=9$ 가 된다.

10에서 19까지 각 자리의 합이 9가 되는 것은 18이므로 $a_{10}\sim a_{18}$은

9임을 알 수 있다. $n=19$일 때 $a_{19}=10$으로 새로운 최댓값을 갖게

되고 a_{28}까지 10이 유지된다.

$a_1=1$, $\quad a_2=2,\cdots$, $a_8=8$

$a_9=9\ \cdots\ a_{18}=9$

$a_{19}=10\ \cdots\ a_{28}=10$

$a_{29}=11\ \cdots\ a_{38}=11$, $\qquad a_{39},a_{40}=12$

$\sum_{n=1}^{40}a_n=1+2+3+\cdots+8+9\times10+10\times10+11\times10+12+12$

$=36+90+100+110+24=360$임을 알 수 있다.

13.

$\sum_{n=1}^{10}(a_{2n}-a_n)$

$=(a_2+a_4+\cdots+a_{20})-(a_1+a_2+\cdots+a_{10})$

$=(a_{12}-a_1)+(a_{14}-a_3)+\cdots+(a_{20}-a_9)$

이고, $a_{12}-a_1=1$, $a_{14}-a_3=2$, $\cdots$, $a_{20}-a_9=16$ 이다.

따라서, $1+2+4+8+16=31$ 이다.

정답 및 해설

14. $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}=\dfrac{a_1+a_4}{a_1a_4}+\dfrac{a_2+a_3}{a_2a_3}=\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_1a_4}=1$

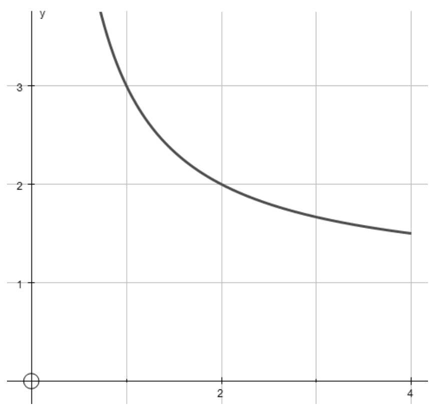
이고, $a_1+a_2+a_3+a_4=4$ 이므로 $a_1a_4=a_2a_3=4$ 이다.

따라서 $a_1\times a_2\times a_3\times a_4=16$ 이다.

15. $(a_4+a_7)a_5a_6=a_4a_5a_6+a_5a_6a_7=2$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{8}a_na_{n+1}a_{n+2}=8$이다.

16. $y=\dfrac{2}{x}+1$ 의 그래프는 그림과 같다.

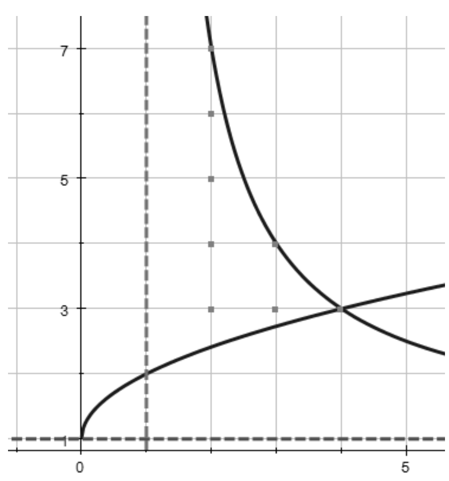


$y=\sqrt{x-n}+n$ 의 그래프는 $(n,\ n)$을 시점으로 하는 그래프이다.
따라서, $n=1,\ 2$ 일 때 한 점에서 만난다. 그러나 $n\geq 3$ 부터는
만나지 않는다.

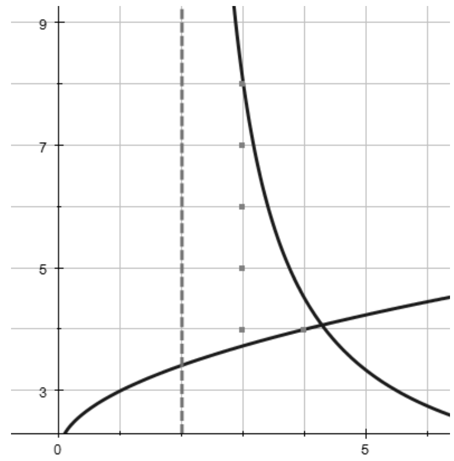
$y=\dfrac{2}{x}+2$ 의 그래프도 그려보면 마찬가지로 $n=1$ 일 때, $n=2$ 일 때에만 성립함을 알 수 있다.

$n=3$ 일 때 성립하려면, $m=3$ 일 때부터 가능하다.
$n=4$ 일 때 성립하려면, $m=4$ 일 때부터 가능하다.
이와 같은 과정을 반복하면, 결국 $n=1$ 일 때에만 2개이고, 나머지 모든 n에 대하여 $n=k$일 때 한 점에서 만나는 m의 개수는 k개다.
따라서 $2+(2+3+4+\cdots+9)=46$ 이다.

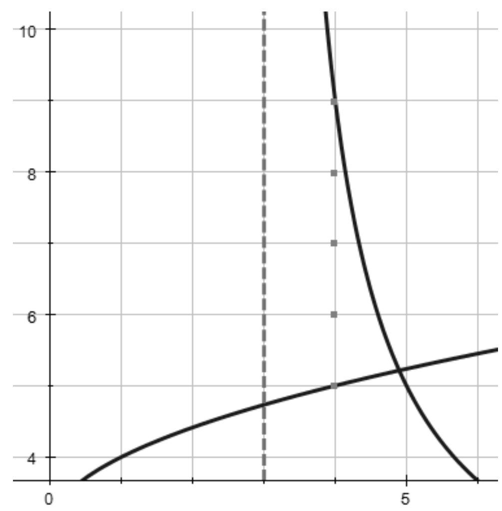
17. a_1 의 상황을 그려보면 다음과 같다. 8개임을 확인한다.



a_2 의 상황을 그려보면 다음과 같다. 6개임을 확인한다.



한번만 더 그려보자. a_3의 상황을 그려보면 다음과 같다.



$a_3=5$ 이다.

여기에서 알 수 있는 것은
① 무리함수의 그래프와 분수함수의 그래프의 교점의 x좌표에 대하여 n이 커질수록 $x=n$과의 거리가 점점 작아지고 있다는 것이다.
② 그러나 교점은 반드시 $x=n+1$보다는 크다.

그 이유를 알아보자.
① 분수함수의 그래프는 $(n+1,\ n+6)$과 $\left(n+2,\ \dfrac{n+7}{2}\right)$을 지난다.

즉, n의 값이 1 커지면 y의 값은 각각 1, $\dfrac{1}{2}$만큼 커진다.

무리함수의 그래프는 $(n+1,\ n+\sqrt{n+1})$과 $(n+2,\ n+\sqrt{n+2})$를 지난다. 즉, n의 값이 1 커지면 y의 값은 $x=n+1$일 때 1보다 더 커지며, $x=n+2$일 때에도 마찬가지이다.
따라서, 무리함수의 그래프가 분수함수보다 더 크게 커지므로, 교점의 x좌표가 작아지게 되는 것이다.
② 분수함수의 그래프는 $(n+1,\ n+6)$을 지나고 무리함수의 그래프는 $(n+1,\ n+\sqrt{n+1})$을 지난다.
$n<35$ 이면 $n+6>n+\sqrt{n+1}$ 이므로, 교점은 반드시 $x=n+1$보다는 큰 곳에서 생긴다.

①과 ②에 의하여, a_1부터 a_3의 그래프를 모두 관찰하였을 때
a_3부터는 결국 자연수 점을 $x=n+1$ 에서만 세어 주어도 충분하다는 것을 알 수 있다.

그러므로, a_3부터는 $n+\sqrt{n+1}\leq y\leq n+6$ 을 만족시키는 자연수 y의 개수를 세어 주면 된다.

정답 및 해설

$a_1 = 8$, $a_2 = 6$,

a_3은 $n+2 \le y \le n+6$인 자연수 y의 개수 : 5

a_4부터 a_8까지는 $n+3 \le y \le n+6$인 자연수 y의 개수 : 4

a_9부터 a_{15}까지는 $n+4 \le y \le n+6$인 자연수 y의 개수 : 3

따라서, $\sum_{n=1}^{15} a_n = 8+6+5+4\times5+3\times7 = 60$이다.

18.

$f(a) = 2^a$, $f(b) = 2^b$, $g(n) = 2^n + n$이므로 $a > b$인 두 자연수 a, b에 대하여 $2^a - 2^b \le 2^n + n$을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하면 된다.

$n=1$일 때, $2^a - 2^b \le 2+1$을 만족시키는 순서쌍은 $(2, 1)$이다.

$n=2$일 때, $2^a - 2^b \le 2^2+2$를 만족시키는 순서쌍은 $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1)$이다.

$n=3$일 때, $2^a - 2^b \le 2^3+3$를 만족시키는 순서쌍은 $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$이다.

$n=4$일 때, $2^a - 2^b \le 2^4+4$를 만족시키는 순서쌍은 $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$이다.

$\cdots$

$n=12$일 때, $2^a - 2^b \le 2^{12}+12$를 만족시키는 순서쌍은 $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$, $(4, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 4)$, $\cdots$, $(11,10)$, $(11,9)$, $\cdots$, $(11, 1)$, $(12, 11)$이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{12} a_n = 1+((1)+2)+((1+2)+1)+((1+2+3)+1)\cdots$$
$$+\cdots((1+2+\cdots+11)+1)$$
$$= 13 + \sum_{n=1}^{11} \frac{n(n+1)}{2} = 13 + \frac{11\times12\times13}{6} = 299$$

19.

먼저, $a_1 = 1$인 것은 등차수열의 초항이 1이라는 뜻이다.

$b_7 = 3$이면 $a_3 \le 7 < a_4$라는 뜻이다.

즉, 공차는 2 초과 3 이하라는 뜻이다.

따라서,

$1+2(n-1) < a_n \le 1+3(n-1)$, 즉 $2n-1 < a_n \le 3n-2$이다.

b_{20}이 될 수 있는 자연수란, $a_k \le 20 < a_{k+1}$이 될 수 있는 자연수 k를 모두 구하라는 뜻이다.

먼저, $a_n > 2n-1$인 경우에는 $a_{10} > 19$이고 $a_{11} > 21$이다.

따라서, $k \le 10$이다.

$a_n \le 3n-2$인 경우에는 $a_7 \le 19$이고 $a_8 \le 22$이다.

따라서 $k \ge 7$이다.

k는 7부터 10까지 모두 가능하므로 답은 $7+8+9+10 = 34$이다.

20.

$\log T = 4.6 - k\log_2(5d+1)$에서 $d=3$을 대입하고, $T = T_1$을 대입하면, $\log T_1 = 4.6 - 4k$이다.

$\log T = 4.6 - k\log_2(5d+1)$에서 $d = 6.2$를 대입하고 $T = T_2$를 대입하면, $\log T_2 = 4.6 - 5k$이다.

$T_2 = (T_1)^2$이므로 $2\log T_1 = 4.6 - 5k$이다.

따라서, $\log T_1 = 4.6 - 4k$에서 양변에 2를 곱한 값에서 $2\log T_1 = 4.6 - 5k$을 빼면 $9.2 - 8k - (4.6 - 5k) = 0$에서 $3k = 4.6$이다. 따라서 $30k = 46$이다.

21.

$n=2$일 때 점 $(2, 2)$ 뿐이므로 $a_2 = 1$이다.

$n=3$일 때 점 $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(3, 2)$이므로 $a_3 = 3$이다.

$n=4$일 때 점 $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 2)$이므로 $a_4 = 5$이다.

$n=5$일 때를 주목하자. $n=5$일 때에는 x좌표가 2이거나 y좌표가 2인 부분을 세지 않는다. 따라서, 같은 방법으로 $a_5 = 5$이다.

이와 같은 방법을 반복하여, $n = k^2+1$ ($k \ge 2$인 자연수) 꼴일 때에 2개씩 덜 세주면 된다. 또 n이 1씩 커질수록 2씩 커진다.

따라서,

$$\sum_{n=2}^{25} a_n = (1+3+5)+(5+\cdots+13)+(13+\cdots+25)+(25+\cdots+41)$$
$$= 9+45+133+297 = 484$$

22.

ㄱ. 집합 A의 원소의 개수를 a, 집합 B의 원소의 개수를 b라고 하면 $f(A)f(B) = 2^{a+b}$ 이다. $n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서 $A\cap B$의 개수를 c라고 하자.

$f(A\cup B) = 2^{a+b-c}$이므로 $\frac{f(A)f(B)}{f(A\cup B)} = \frac{2^{a+b}}{2^{a+b-c}} = \frac{1}{2^{-c}} = 1$ 이므로 $c = 0$이다. 따라서 $A\cap B = \varnothing$이다. (참)

ㄴ. 조건을 보고 $2^a + 2^b = 2^{c+1}$이라고 가정해보자

$a > b$ 인 경우, $2^a + 2^b$는 2^k (k는 자연수)꼴이 안 된다.

$a < b$ 인 경우도 $2^a + 2^b$는 2^k (k는 자연수)꼴이 안 된다.

($a > b$이면 $2^a < 2^a + 2^b < 2^a + 2^a = 2^{a+1}$ 이기 때문이고, $a < b$이면 $2^b < 2^a + 2^b < 2^b + 2^b = 2^{b+1}$ 이기 때문이다.)

따라서 $a = b = c$이다. 그러므로 $A = B$이다.

ㄷ. $\frac{f(A)+f(B)}{f(A\cup B)} = \frac{2^a+2^b}{2^{a+b-c}} = 1$ 이므로 $2^a + 2^b = 2^{a+b-c}$ 이다.

$a = b$가 아니라면 $2^a + 2^b$는 2^k로 나타내지 못하므로 $a = b$이다.

$2^{a+1} = 2^{2a-c}$이고 $a+1 = 2a-c$이므로 $a = c+1$이다.

따라서 $\frac{f(A\cup B)}{f(A\cap B)} = \frac{2^{a+b-c}}{2^c} = \frac{2^{2c+2-c}}{2^c} = 2^2 = 4$이다. (참)

23.

$a_{n+3} = -2a_n$이므로 $a_{n+3k} = (-2)^k a_n$이 성립한다.

$$\sum_{k=16}^{18} a_k = (a_{16}+a_{17}+a_{18})$$
$$= (-2)^5(a_1+a_2+a_3) = -32(a_1+a_2+a_3)\text{이므로}$$

$a_1+a_2+a_3 = 0$이고 자연수 k에 대하여 $a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k} = 0$이다.

$$\sum_{k=20}^{30} a_k = a_{20}+a_{21}+(a_{22}+a_{23}+a_{24})+\cdots(a_{28}+a_{29}+a_{30})$$

$= a_{20}+a_{21} = -a_{19} = (-2)^6(-3) = -192$이므로 $\sum_{k=20}^{30} a_k = 192$이다.

24. $n=2$일 때

$2-a \le a \le 2^{2^{2-a}}$

이를 만족하는 자연수 a는 $a = 1, 2$ 두개다. : $f(2) = 2$

($a=3$이면 $2^{2^{2-3}} = 2^{\frac{1}{2}} < 3$)

정답 및 해설

$n=12$일 때

$12-a \le a \le 2^{2^{12-a}}$이다.

$12-a \le a$에서 $a \ge 6$임을 알 수 있다.

$a \le 2^{2^{12-a}}$는 대입을 통해 알 수 있다.

$a=6$부터 10까지는 자명하게 성립함을 알 수 있다.

$a=11$일 때 성립하지 않는다.

$\therefore 6 \le a \le 10$으로 $f(12)=5$

$n=19$일 때

$19-a \le a \le 2^{2^{19-a}}$이다.

$19-a \le a$에서 $a \ge \dfrac{19}{2}$임을 알 수 있다.

$a \le 2^{2^{19-a}}$에서 $a=10$부터 $a=16$까지는 대입을 통해 자명하게 성립함을 알 수 있다.

$a=17$일 때 : $17 \le 16$이므로 성립하지 않는다.

$\therefore 10 \le a \le 16$으로 $f(19)=7$

따라서 $f(2)\times f(12)\times f(19)=70$이다.

25. 등비수열 $a_n=a_1r^{n-1}$을 준 식에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1r^{n-1}\times 6^n+3^{n+1}}{3^n+a_1r^{n-1}\times 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{r}\times(6r)^n+3^{n+1}}{3^n+\frac{a_1}{r}\times(2r)^n}$$ 이다.

만약 $6r>3$이라면 극한은 수렴하지 않으며 $6r<3$이라면 극한 값이 3이므로 주어진 문제에 부합하지 않게된다.

따라서 극한값이 6으로 수렴하기 위해서는 반드시 $6r=3$ 이어야 한다. 또한 $6r=3$이므로 모든 항을 3^n으로 나누어주면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1}{r}+3}{1+0}=6$$이므로 $2a_1+3=6$이다.

$a_1=\dfrac{3}{2}$, $r=\dfrac{1}{2}$, $a_n=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

따라서 구하고자하는 무한급수의 값은 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n a_n=6$ 이다.

26.

a와 관계없이 일정한 점을 지나므로 a에 대하여 식을 정리하면 $2x^3-x+a(x^2-2x+1)$이 된다.

a의 값과 관계없이 지나는 점이라면 a가 포함된 항이 0이 되면 된다. 따라서 $x=1$일 때 $(1,1)$을 반드시 지나게 되므로 이 점이 P임을 알 수 있다.

점 $\mathrm{P}(1,1)$에서 접선이 $(0,b)$를 지나므로 접선의 방정식을 세우면 $y=5(x-1)+1$ 이고 $(0,b)$를 대입 하면 $b=-4$이다.

27.

선분 OP의 길이를 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases} t+1 & (0\le t<1)\\ 2 & (1\le t<2\pi+1)\\ (2\pi+3)-t & (2\pi+1\le t<2\pi+2)\\ 1 & (2\pi+2\le t<3\pi+2)\end{cases}$$

$$\int_0^1(t+1)dt+\int_1^{2\pi+1}2\,dt+\int_{2\pi+1}^{2\pi+2}(-t+2\pi+3)dt+\int_{2\pi+2}^{3\pi+2}1dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^1+\Big[2t\Big]_1^{2\pi+1}+\left[-\frac{1}{2}t^2+(2\pi+3)t\right]_{2\pi+1}^{2\pi+2}+\Big[t\Big]_{2\pi+2}^{3\pi+2}$$

$=5\pi+3$ $\qquad\therefore p^2+q^2=34$이다

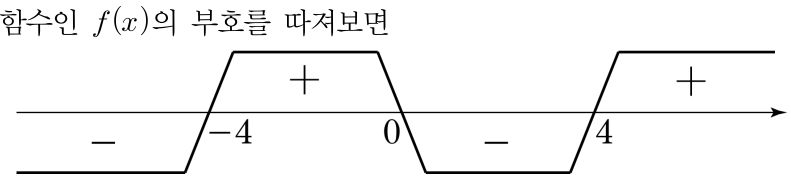
28.

주어진 그래프를 통해 $f(x)=kx(x+4)(x-4)$로 둘 수 있다.

$g(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)dx$이며 $f(x)$의 부정적분을 $\displaystyle\int f(x)dx=F(x)$ 라고 하면 다음이 성립한다.

$g(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)=\frac{k}{4}x^4-8kx^2-\frac{k}{4}a^4-8ka^2$이고 $g'(x)=f(x)$이다.

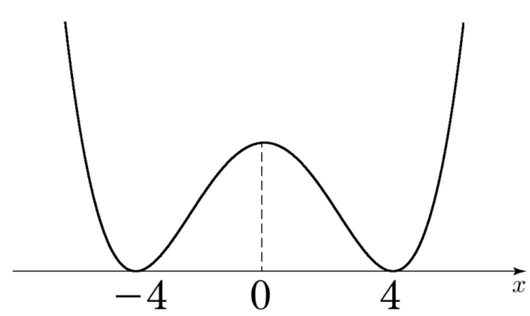
도함수인 $f(x)$의 부호를 따져보면



$x=0$에서 극대이고 $x=\pm4$에서 극소이다.

$g(x)=F(x)-F(a)=0$이고 $F(x)=F(a)$의 서로 다른 실근이 4개가 되어야 한다.

앞서 구한 도함수인 $f(x)$의 부호표를 통해 $F(x)$의 개형을 추론 해볼 수 있다.



실근이 4개가 존재하기 위해선 $F(-4)<F(a)<F(0)$이면 된다.

따라서 $F(0)$의 근 사이에 존재하는 x값을 찾으면 된다.

$F(x)=F(0)$을 만족시키는 근은 세 개로 $\alpha, 0, \beta$ $(\alpha<\beta)$이며 이는 $F(x)-F(0)=0$으로 나타낼 수 있다.

이 식은

$g(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)=\frac{k}{4}x^4-8kx^2-\frac{k}{4}a^4-8ka^2$에서 $a=0$을 대입한 것과 같다.

$F(x)-F(0)=kx^2\left(\dfrac{1}{4}x^2-8\right)=0$, $\alpha=-\sqrt{32}$, $\beta=\sqrt{32}$이다.

따라서 a가 $x=-5,-3,-2,-1,1,2,3,5$일 때 4개의 실근을 갖게 된다. 따라서 a의 개수는 8개이다.

29.

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$

ㄱ. $g(0)=0$, $g'(0)=f(0)>0$이다. 따라서 $g'(0)>g(0)=0$이다. (참)

정답 및 해설

ㄴ. $(-1,0)$에서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$의 부호를 살펴보자. 이 구간에서 항상 $f(x)>0$이고 $f(x)$가 감소하므로 $f'(x)<0$ 이다.
따라서 $xf'(x)>0$이므로 $g'(x)=f(x)+xf'(x)>0$이다.
$g(x)$는 구간 $(-1,0)$에서 증가한다.(참)
ㄷ. 평균값 정리를 이용하자.
$g'(c)=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=2$를 만족하는 a, b를 찾아보면 $a=0$인 경우 $g(a)=0$이므로 $b=-2,2$를 대입하여 평균값 정리를 사용해보자.
구간 $(-2,0)$에서 평균값 정리를 이용하면 $\dfrac{-4-0}{-2}=2$로 만족하고
구간 $(0,2)$에서도 평균값 정리를 이용하면 $\dfrac{4-0}{2-0}=2$로 만족한다.
따라서 평균값의 정리에 의하여 $g'(c)=2$인 c가 구간$(-2,0)$와 $(0,2)$에 적어도 하나씩 존재한다. (참)

30. ㄱ. $\lim\limits_{x\to1+}f(-x)=1$ (거짓)
ㄴ. $\{f(2)\}^2=4$ 이고 $\lim\limits_{x\to2+0}\{f(x)\}^2=\lim\limits_{x\to2-0}\{f(x)\}^2=4$이다. (참)
ㄷ. 연속함수의 성질에 의해 $f(x)$의 불연속점에서만 $f(x)f(1-x)$가 연속인지 확인하면 된다.
$x=2$ 에서 $f(2)f(-1)=f(2)f(3)=-2$,
$\lim\limits_{x\to2+}f(x)f(1-x)=-2$, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)f(1-x)=-2$ 이므로 $x=2$ 에서 연속
$x=3$에서 $f(3)f(-2)=f(3)f(2)=-2$
$\lim\limits_{x\to3+}f(x)f(1-x)=-2$ $\lim\limits_{x\to3-}f(x)f(1-x)=-2$
이므로 $x=3$에서 연속이다. 따라서 실수 전체 집합에서 연속이다.

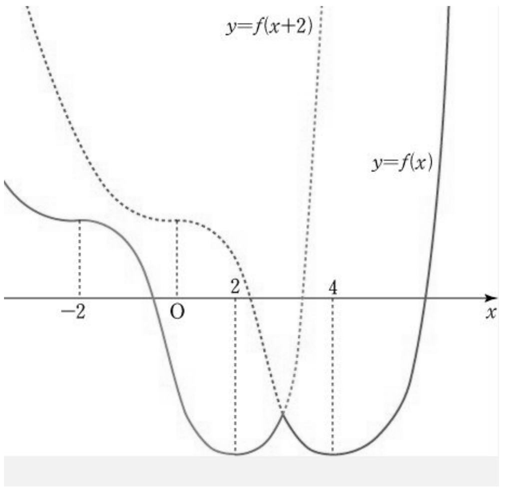
31.
$f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때,
즉 $f'(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$일 때에는 그래프를 그려보면 (가) 조건에 위배된다.

$f'(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가질 때에는 (가) 조건은 성립하지만 (나)조건에는 위배된다.

따라서 $f'(x)=0$이 두 실근을 가진다. 이 경우 중근과 하나의 실근을 갖는데, 중근이 다른 하나의 실근보다 더 큰 경우에는 (가) 조건은 성립하지만 (나) 조건을 성립시키지 못한다.

결론적으로, $f'(x)=0$이 두 실근을 갖는데, 중근이 다른 하나의 실근보다 작은 경우에는 (가)와 (나)를 모두 만족시킬 가능성이 생긴다.

따라서, (가)와 (나)조건을 모두 만족시키는 개형은 다음과 같다.



따라서 $f'(x)=4x^2(x-4)$임을 알 수 있다. $\therefore f'(5)=100$

32.
$\int_0^2 f(x)+g(x)dx=0$, $\int_0^2 f(x)dx=-\int_0^2 g(x)dx=4$
$f(x)-g(x)=k(x+2)x(x-1)$
두 곡선 사이의 넓이를 구해야 하므로 $\int_{-2}^{1}|f(x)-g(x)|dx$를
구하면 된다. $\int_{-2}^{0}|f(x)-g(x)|dx+\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$
문제 조건에서 $\int_0^2 f(x)-g(x)dx=8$ 임을 알 수 있으므로
$\int_0^2 f(x)-g(x)dx=\int_0^2 k(x+2)x(x-1)$
이를 적분하면 $\left[k(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2)\right]_0^2=\frac{8}{3}k=8$
따라서 $k=3$이다. 두 곡선 사이의 넓이이므로 교점을 기준으로 함수를 나누어서 각각 적분 값을 구한 후 양수로 더하면 된다.
$S=\left|\int_{-2}^{0}3(x+2)x(x-1)dx\right|+\left|\int_0^1 3(x+2)x(x-1)dx\right|$
$=8+\frac{5}{4}=\frac{37}{4}$. 따라서 $20S=185$ 이다.

33.
절댓값을 없애기 위해 x의 범위를 나누자
$|x|\geqq3$ 인 경우 $f(x)=x^3+2ax^2-9a$
$|x|<3$ 인 경우 $f(x)=x^3+9a$

도함수를 구해보면,
$|x|\geqq3$ 인 경우 $f'(x)=3x^2+4ax$
$|x|<3$ 인 경우 $f'(x)=3x^2$
극값이 존재하지 않으려면 $x=\pm3$에서 도함수의 부호가 변하지 않으면 된다.
도함수에 대해 극한값을 조사하자.
3에서 좌극한이 양수이므로 우극한도 양수여야 한다.
$\lim\limits_{x\to3+}(3x^2+4ax)\geq0$ $a\geq-\dfrac{9}{4}$
-3에서 우극한 값이 양수이므로 좌극한도 양수여야 한다.
$\lim\limits_{x\to-3-}(3x^2+4ax)\geq0$ $a\leqq\dfrac{9}{4}$
따라서 이를 만족하는 정수 $a=-2,-1,0,1,2$ 로 5개이다.

정답 및 해설

34. 수열 a_n에 $n=1$부터 대입해보면

$a_1=(-1)^2(\log\frac{5}{1})=\log5$

$a_2=(-1)^3(\log\frac{6}{2})=-\log6+\log2$

$a_3=(-1)^4(\log\frac{7}{3})=\log7-\log3$

$a_4=(-1)^5(\log\frac{8}{4})=-\log8+\log4$

$a_5=(-1)^6(\log\frac{9}{5})=\log9-\log5$

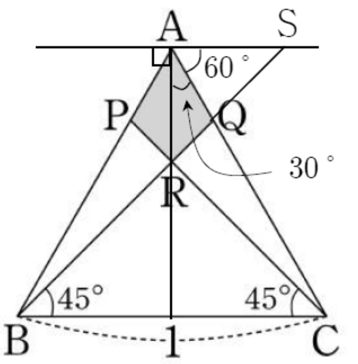
$a_6=(-1)^7(\log\frac{10}{6})=-\log10+\log6$

$a_7=(-1)^8(\log\frac{11}{7})=\log11-\log7$

이를 무한대까지 더하면 $\log2-\log3+\log4$만 남게 된다.

따라서 $a=\log\frac{8}{3}$이므로 $10^a=\frac{8}{3}$이다.

35.

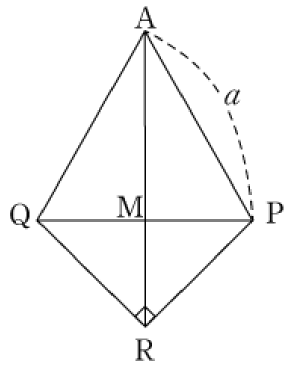


먼저 구하기 쉬운 공비부터 구해보자.

정삼각형 ABC의 높이 : $\frac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 BCR로 만들어지는 정삼각형의 높이 : $\frac{1}{2}$

변의 공비는 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 넓이의 공비는 $\frac{1}{3}$가 된다.



다음으로 초항을 구해보자.

초항을 구하기 위해서 사각형 APRQ에서 $\overline{PQ}$를 그으면 정삼각형과 직각이등변삼각형이 나온다. $\overline{AP}=a$ 라고 하면

$\overline{AR}=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}a$이다. $\overline{AR}$은 삼각형 ABC의 높이에서 삼각형 BRC로 만들어지는 정삼각형의 높이를 뺀 값이므로

$\overline{AR}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$ 이다.

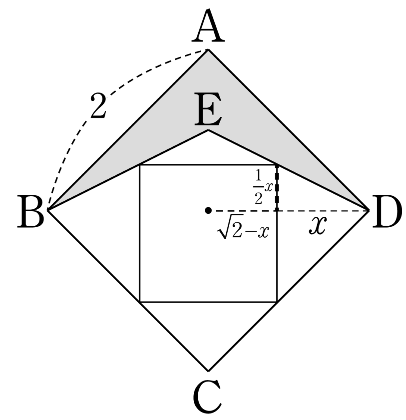
따라서 $a=2-\sqrt{3}$임을 알 수 있다.

그러면 사각형 APRQ의 넓이는

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2-\sqrt{3})^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3\sqrt{3}-5}{4}$$

그러므로, $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{3\sqrt{3}-5}{4}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9\sqrt{3}-15}{8}$ 이다.

36.



사각형의 중심을 O라고 하면 $\overline{OE}:\overline{OD}=1:2$의 닮음비를 갖는다.

이를 통해 그림을 미지수 x를 통해 위와 같이 표현할 수 있다.

정사각형의 한 변의 길이를 이용해보자

$2(\sqrt{2}-x)=x+\frac{1}{2}x$ 를 만족한다. (x가 포함된 삼각형이 직각이등변 삼각형임을 생각)

$\frac{7}{4}x=\sqrt{2}\quad\therefore\ x=\frac{4\sqrt{2}}{7}$ 이므로

첫 번째 사각형의 한변의 길이는 2, 다음 사각형의 한변의 길이는

$\frac{6\sqrt{2}}{7}$ 이다. 따라서 변의 공비는 $r=\left(\frac{\frac{6\sqrt{2}}{7}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{7}$

이다.

따라서 넓이의 공비는 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{7}\right)^2=\frac{18}{49}$이고 초항은 1이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{18}{49}}=\frac{49}{31}$ 이 된다.

37.

원 C_1의 중심의 좌표를 P, 원 C_2의 중심의 좌표를 Q라 하면

P $(0,\ t)$, Q$(8-t,\ 6)$ 이다.

1) 두 원이 한 점에서 만날 때

두 중심 사이의 거리가 반지름의 합과 같으므로

$\sqrt{(t-8)^2+(t-6)^2}=2$이다.

$t^2-14t+48=0$이므로 $t=6, 8$ 때 한 점에서 만난다.

따라서 모든 t값의 곱은 48

2) 두 원이 일치하는 경우

$\begin{cases} x\text{좌표}: 0=8-t \\ y\text{좌표}: t=6 \end{cases}$ 이며 이를 만족하는 t는 없다.

따라서 두 원이 만나서 생기는 교점의 개수는

$f(t)=\begin{cases} 0 & t<6, t>8 \\ 1 & t=6,8 \\ 2 & 6<t<8 \end{cases}$ 이므로 $t=6,8$에서 불연속이다.

따라서 조건을 만족하는 모든 t값의 곱은 48이다.

38.

$f'(x)-f(2)=-6x^2$이다.

따라서, $f'(x)=-6x^2+f(2)$이므로 $f(x)=-2x^3+f(2)x+C$이다.

$x=2$를 대입하면 $f(2)=16-C$임을 알 수 있다.

한편, $f(1)=-2+f(2)+C=14$이다.

39.

$g(x)$가 $x=0,-1$에서 불연속이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=0,-1$을 제외하고 반드시 연속이다.

(1) $x=-1$에서의 연속성

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(-1)}{g(-1)}$

이때, $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{g(x)}=-f(-1)$이고 $\dfrac{f(-1)}{g(-1)}=f(-1)$ 이므로

$-f(-1)=f(-1)$이다. 따라서 $x=-1$에서 연속이기 위해서

$f(-1)=0$ 이어야한다.

(2) $x=0$에서의 연속성

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(0)}{g(0)}$

극한값이 존재해야 하므로 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 에서

$f(0)=0$이어야 한다. 극한값은 $f'(0)$이다.

$\dfrac{f(0)}{g(0)}=f(0)$이므로, $x=0$에서 연속이려면 $f(0)=f'(0)=0$이어야 한다.

$x=0,-1$에서의 연속성 조건을 통해 삼차함수가

$f(x)=kx^2(x+1)$임을 알 수 있다.

따라서, $\dfrac{f(8)}{f(3)}=\dfrac{k\times64\times9}{k\times4\times9}=16$ 이다.

40.

(가)에서 $f(1)>0$이고 $f(2)<0$이다.

따라서 사잇값의 정리에 의하여 구간 (1, 2)에 적어도 하나의 해가 존재한다.

한편, 열린 구간 $(-\infty, 0)$에서 $f(x)<0$이므로, $f(0)<0$이다.

$f(1)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 구간 (0, 1)에서도 적어도 하나의 해가 존재한다.

41.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^n}{5^{n-1}+3^n}=5$에서 a 또는 b가 5보다 큰 수이면 발산하게 되므로 a, b는 모두 5보다 작아야한다.

(1) $a=5, b=5$ 인 경우

주어진 식의 극한값이 30으로 성립하지 않는다.

(2) $a=5, b<5$ 인 경우

마찬가지로 극한값이 25로 성립하지 않는다.

(3)$a<5, b=5$인 경우

극한값이 5로 주어진 식을 만족한다.

따라서, $a<5$이고 $b=5$이므로 $a+b$의 최댓값은 9이다.

42.

$f(x+1)=\begin{cases} x & (x<a-1) \\ (x-1)^2 & (x\geq a-1) \end{cases}$ 이므로

우극한 : $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lim_{x\to a+}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$

좌극한 : $\displaystyle\lim_{x\to a-}\frac{f(x+1)}{f(x)}=\lim_{x\to a-}\frac{(x-1)^2}{x-1}$

극한값이 존재하므로 $\left(\dfrac{a-1}{a-2}\right)^2=a-1$ 이고 이 식을 a에 대하여

정리하면 $(a-1)(a^2-5a+5)=0$이다. $a=1$ 또는 a^2-5a+5의

판별식 $D>0$이므로 근과 계수의 관계에 의해 근의 합 =5

따라서 모든 근의 합 =6

43.

등차수열이므로 $a_n=a_1+(n-1)d$라 하자.

$S_n=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{S_n+S_k}-n)=\lim_{n\to\infty}n\frac{S_n+S_k-n^2}{(\sqrt{S_n+S_k}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n+S_k-n^2}{\left(\sqrt{\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n+S_k}+n\right)}$$

$$=8$$

이 성립해야 한다.

분자에 n이 곱해지게 되므로 $\dfrac{d}{2}n^2-n^2$항과 $\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$이 존재하게 되면 극한 값이 발산하게 되므로 두 항은 0이 되어야 한다. 이를 통해 $d=2$, $a_1=1$이고, $S_k=16$임을 알 수 있고 $a_n=2n-1$이고 $S_n=n^2$이다.

$S_k=16$이므로 $S_4=16$이다. 따라서 $k=4$이다.

따라서 $a_k=a_4=7$이다.

44.

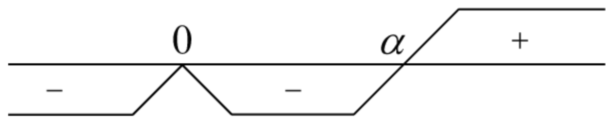
$f'(x)$ 삼차함수이며 최대 3개의 실근을 가질 수 있다.

문제에서 주어진 부호표를 통해 알 수 있는 것은 $f'(x)$는 $x=0$과 사잇값 정리에 의해 $(0,1)$에서 최소 하나의 근을 갖게 된다. 따라서 최소한 두 개의 근을 가짐을 알 수 있다.

또한 0에서 부호가 변하지 않음을 통해 도함수는 $x=0$에서 중근을 가짐을 알 수 있으므로 $f'(x)$는 두 개의 근을 갖는 다는 것 또한 알 수 있다.

$(0,1)$에서의 실근을 α라고 하면 $f'(x)$의 부호표는 다음과 같다.

정답 및 해설



따라서 $f'(x)=4x^2(x-\alpha)$라고 할 수 있다.

$f'(1)=1$ 이므로 $\alpha=\dfrac{3}{4}$이고 $f'(x)=4x^2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$이다.

따라서, $f(x)=x^4-x^3+C$ (C는 적분상수) 이고

$\displaystyle\int_0^1|f(x)-f(0)|dx=\int_0^1|x^4-x^3|dx=\frac{1}{20}$ 이다.

45.

분모가 0으로 수렴하므로 분자도 0으로 수렴해야 하므로 $f(0)=f(1)$이다.

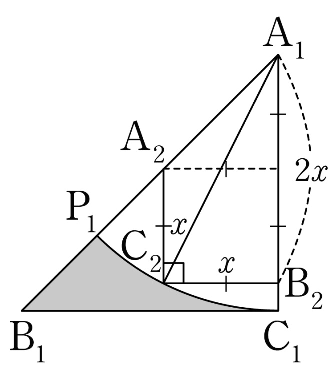
따라서 $f(x)-f(1)=kx(x-1)$이라고 할 수 있다.

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-x}=\lim_{x\to0}\frac{kx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=2$ 이므로 $k=2$ 이다.

따라서 구하고자하는 극한값은

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-x}=\frac{2x(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=1$ 임을 알 수 있다.

46.



위의 그림과 같이 보조선을 그리고 x로 나타내보면 직각삼각형 AMN이 보이게 되므로 $x^2+(2x)^2=1$ 이고 $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 임을 알 수 있다.

따라서 첫 번째 삼각형과 두 번째 삼각형 사이의 변의 비는 $1:\dfrac{1}{\sqrt{5}}$이므로 넓이의 공비는 $\dfrac{1}{5}$가 되고, 초항은 삼각형에서 부채꼴을 뺀 넓이이므로 $S_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{8}$이다.

따라서 구하고자하는 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$ 이다.

47.

주어진 무한 급수의 각 항을 살펴보면 홀수항과 짝수항의 부호가 다름을 알 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{2^n}=\frac{(-1)^1}{2^1}+\frac{(-1)^4}{2^2}+\frac{(-1)^9}{2^3}+\frac{(-1)^{16}}{2^4}+\cdots$$

따라서 홀수항과 짝수항을 따로 묶어서 등비급수를 계산해주면 된다.

$$=(-1)\cdot\left\{\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots\right\}$$

$$=(-1)\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}}+\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$$

48.

$f(x)=x^3+x$ 는 $-f(x)=f(-x)$를 만족하므로 원점 대칭인 함수이다.

$y=2$와 $f(x)$가 만나는 점의 x좌표는 $x=1$이다.

구간 $(-1,1)$에서 $2>x^3+x$임을 보이자.

$$2-x-x^3=-(x-1)(x^2+x+2)>0$$
$$(x-1)(x^2+x+2)<0$$

x^2+x+2는 항상 양수이므로 $(-1,1)$에서 $(x-1)(x^2+x+2)<0$ 이 성립한다. 즉, $2>x^3+x$이 성립하고 구간 $(-1,1)$에서 다른 근을 가지지 않게 된다.

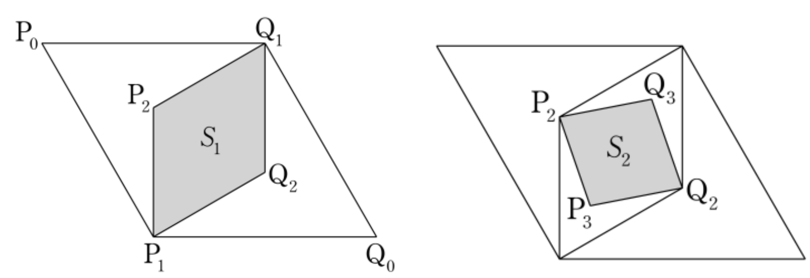
따라서 두 직선과 $f(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|2-x^3-x|\,dx=\int_{-1}^{1}(2-x^3-x)\,dx$$
$$=\left[2x-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1}=4$$

(별해)

$f(x)=x^3+x$의 그래프는 원점대칭이다. 아래쪽 색칠되는 부분이 위쪽 빈 부분과 동일하므로 사각형의 넓이를 구하면 된다. $2\times2=4$

49.



마름모 $P_0P_1Q_0Q_1$의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times1^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다. 이 마름모에서 한 대각선의 길이가 $\dfrac{1}{3}$배 되었으므로, $S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$이다.

S_1에서 마름모의 한 대각선의 길이가 $\dfrac{2}{4}$배 되었으므로,

$S_2=\dfrac{2}{4}S_1$이다.

S_2에서 마름모의 한 대각선의 길이가 $\dfrac{3}{5}$배 되었으므로,

$S_3=\dfrac{3}{5}S_2$이다.

이와 같은 과정을 반복하여, S_{n-1}에서 마름모의 한 대각선의 길이가 $\dfrac{n}{n+2}$배 되었으므로, $S_n=\dfrac{n}{n+2}S_{n-1}$ 이다.

$S_2=\dfrac{2}{4}S_1$, $S_3=\dfrac{3}{5}S_2$, $\cdots$, $S_n=\dfrac{n}{n+2}S_{n-1}$을 변변 곱하여

정리하면, $S_n=\dfrac{6}{(n+1)(n+2)}S_1=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\sqrt{3}$이다.

$\displaystyle\therefore\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{2}$

50.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\displaystyle\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$이 성립한다.

정답 및 해설

$\lim_{x\to1-}x=f(1)$ 이므로 $f(1)=1$이다.
함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2+}g(x)=g(2)$
$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}-x+5=3$ 이므로 $f(2)=3$이다.

또한, $x=2$에서만 미분이 불가능하므로 $x=1$에서는 미분가능하다.
$\lim_{h\to0-}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h}$

$\lim_{h\to0-}\dfrac{(1+h)-1}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$
$f'(1)=1$임을 알 수 있다.

$f(1)=1$, $f'(1)=1$, $f(2)=3$이고 $f(x)$는 이차함수이므로
$f(x)=ax^2+bx+c$라고 두고 주어진 값들을 대입하여 a, b, c를
구하면 된다.
$1=a+b+c$, $1=2a+b$, $3=4a+2b+c$
$a=1$, $b=-1$, $c=1$ 이므로 $f(x)=x^2-x+1$이다.
따라서 $f(5)=21$이다.

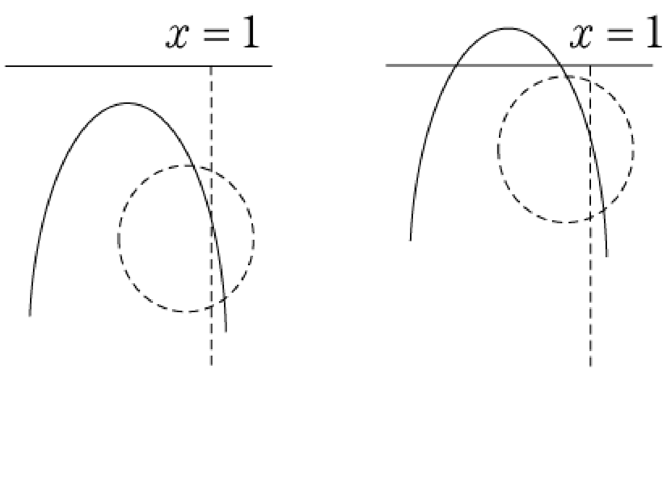
51.
함수 $f(x)$는 미분가능하며 역함수를 가지므로 일대일 함수이며
$f(g(x))=x$, $f(x)=g^{-1}(x)$가 성립한다.

조건 (가)에 의하면 $f'(1)=-6$이므로 미분계수가 양수인 부분이
있으면 극값을 가지므로 일대일 함수라는 가정에 모순이고 따라서
$f(x)$는 감소함수이다.

$f(0)=g(0)=k$ 라 하면 $f(k)=g(k)=0$이므로 $k=0,1,3$이다. 이와
같은 방법으로 $\{f(0), f(1), f(3)\}=\{0,1,3\}$ 이다.
$f(x)$가 감소함수라고 하였으므로 $f(0)=g(0)=3$, $f(1)=g(1)=1$,
$f(3)=g(3)=0$이다.

$f(x)$가 $x\le1$인 구간에서는 삼차함수 그래프의 일부이므로
삼차함수를 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라고 하자.
$f(0)=3$, $f(1)=1$, $f'(1)=-6$ 을 식에 대입하면
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=ax^3+(-2a-4)x^2+(a+2)x+3$ 이다.

이때, $f'(1)=-6$ 이고 평균값 정리에 의해 열린구간 $(0,1)$에
기울기가 -2인 부분이 존재한다.
삼차함수의 도함수인 이차함수의 경우를 나눠보면

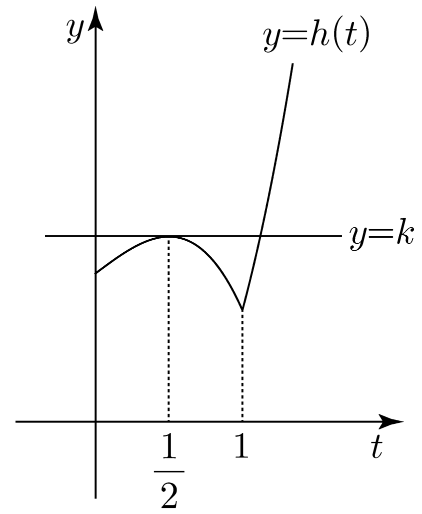


구간 $[0,1]$에서 기울기가 점점 감소하므로 도함수의 그래프에선 위의
원으로 된 영역과 같은 부분이다. 만일 도함수가 두 번째와 같다면
극값이 존재하므로 문제상황에 맞지 않게 된다.
따라서 $f'(x)\le0$ 이어야 한다.
$f(x)=kx^3+bx^2+cx+d=kx^3+(-2k-4)x^2+(k+2)x+3$
$f'(x)=3kx^2+(-4k-8)x+k+2$이고 판별식 $D\le0$이어야 한다.
$D=(4k+8)^2-4\cdot3k\cdot(k+2)\le0$
$k^2+10k+16\le0$ 이므로 $-8\le k\le-2$이다.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\{kx^3+(-2k-4)x^2+(k+2)x+3\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}kx^4+\frac{1}{3}(-2k-4)x^3+\frac{1}{2}(k+2)x^2+3x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{12}k+\frac{8}{3}$$
따라서, $k=-2$일 때 $\dfrac{5}{2}$의 최댓값을 갖게 되므로 $20a=50$ 이다.

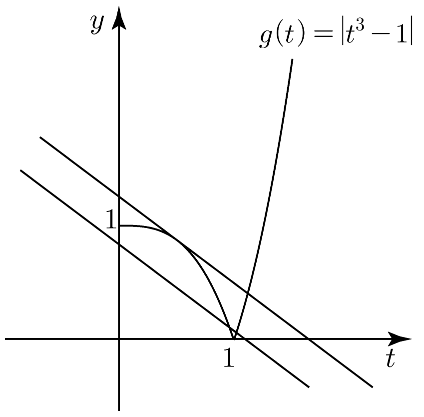
52. $g(t)=\sqrt{f(t)+(t-1)^2}=\sqrt{t^6-2t^3+1}=|t^3-1|$이다.

(풀이1) $h(t)=|t^3-1|+\dfrac{3}{4}t$라 하면 주어진 방정식의 근의 개수를
구하는 것은 곡선 $y=h(t)$의 그래프와 $y=k$의 교점의 개수를 구하는
것과 같다. $0\le t<1$인 경우, $h(t)=1-t^3+\dfrac{3}{4}t$를 그리기 위해
도함수를 구해보면 $h'(t)=-3t^2+\dfrac{3}{4}$이고 $x=\dfrac{1}{2}$에서 극댓값을
가짐을 알 수 있다. $t\ge1$인 경우, $h(t)=t^3-1+\dfrac{3}{4}t$이고,
$h'(t)>0$이다. 종합하면 함수 $h(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



실근의 개수가 2개일 때의 k의 값은 함수 $h(t)$의 극댓값이거나
$\dfrac{3}{4}<k<1$인 경우이므로 k의 최댓값은 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$

(풀이2) t에 대한 방정식 $g(t)+\dfrac{3}{4}t=k$을 $|t^3-1|=k-\dfrac{3}{4}t$로
변형하여 그래프의 교점의 개수에 관한 관점으로 풀자. 서로 다른
실근의 개수가 2인 경우는 다음 그림과 같은 상황이고, k의 최댓값은
직선 $y=k-\dfrac{3}{4}t$가 함수 $g(t)$의 그래프에 접할 때다.



접하는 점의 좌표를 a라 하면 $0<a<1$이므로 $g(a)=1-a^3$이고

$g'(a)=-3a^2=-\dfrac{3}{4}$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$이다. $1-a^3=k-\dfrac{3}{4}a$이므로

$k=\dfrac{5}{4}$를 얻는다.

53.

무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3^n+1}{3^n-1}\right)$가 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3^n+1}{3^n-1}\right)=0$이고,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n+1}{3^n-1}\right)=1$ 이므로 수렴하는 수열의 성질에 의해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$을 얻는다.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5}{a_n+1}=3$이다.

54.

주어진 함수 $y=f(x)$는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로 주어진 극한식

$\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f^{-1}(x)=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)$이다.

따라서, $\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1-1=0$ 이다.

* $\displaystyle\lim_{x\to1+}f^{-1}(x)$에서 $f^{-1}(1+)=a$이므로 $f(a)=1+$, 즉 어떤 $x=a$로 극한 될 때 y가 $1+$로 접근하는지 관찰하면 된다. 따라서 x는 -1의 좌극한으로 접근하면 된다.

55.

$$f(x)=\begin{cases}x & (x<1)\\ -x+3 & (1\le x\le 2)\\ x-2 & (x>2)\end{cases}$$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=0$을 통해 $g(1)=0$임을 알 수 있다.

또 $\displaystyle\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=1$에서 x가 2에 다가갈수록 $f(x)$가 0으로 수렴한다.

즉, 분모가 0으로 수렴하므로 극한의 성질에 의해 분자 또한 0에 수렴하게 되어 $g(2)=0$이다.

이를 통해 $g(x)=a(x-1)(x-2)$라고 둘 수 있다.

다시 주어진 조건 $\displaystyle\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=1$에 $g(x)$를 대입하면

$\displaystyle\lim_{x\to2+}\frac{a(x-1)(x-2)}{x-2}=1$ 이므로 $a=1$이다.

따라서, $g(8)=42$ 이다.

56.

집합 A를 해석해보면 $f(x)$는 a근방에서 $f(x)\ge f(a)$ 이므로

$f(a)$가 극솟값이라는 것을 알 수 있다.

따라서 a는 $f(x)$가 극솟값을 갖게 되는 x값이다.

$f(x)=x^4-3x^3+x^2+1$

$f'(x)=4x^3-9x^2+2x=x(4x-1)(x-2)$

$f(0)=1$, $f(2)=-3$ 이고 $f(2)$일 때 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.

$a=2$인 경우를 생각해보자.

$f(x)\ge f(2)$를 모든 x에 대해 만족한다.

즉, 어떤 k값에 대해서도 성립하므로 집합A의 원소는 $a=2$ 한 개로 유일하다.

$a=0$인 경우를 생각해보자.

$f(0)$은 $x=0$ 근방에서 최소이므로 $f(x)\ge f(0)$이 성립한다.

하지만 $f(0)>f(2)$이기 때문에 $x=0+k$ 를 넘어가는 순간

$f(x)<f(0)$이 되는 양수 k가 존재한다.

따라서 $f(x)=f(0)$이 되는 x를 구해보면

$x^4-3x^3+x^2=x^2(x^2-3x+1)$, $\quad x=0,\ \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$이다.

즉 $f(x)\ge f(0)$을 만족하는 x의 범위는 $x\le\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$,

$x\ge\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

따라서, $|x-0|\le k$의 범위를 만족 시키는 k의 최댓값은

$k=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$이다. 이때 $a=0,\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$로 원소의 개수가 2개가 된다.

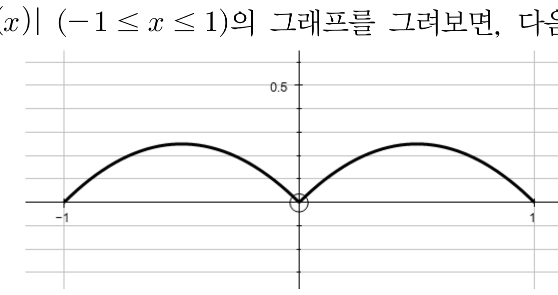
57.

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{x(1-x)}{x-1}=-1$ (거짓)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}|x+1|=1$이고

$\displaystyle\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}|x-1|=1$이므로 미분가능하다. (참)

ㄷ. $y=|f(x)|$ $(-1\le x\le1)$의 그래프를 그려보면, 다음과 같다.



$y=|f(x)|$의 그래프는 $-1\le x\le0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$에 대하여

대칭이고, $0\le x\le1$에서 $x=\dfrac{1}{2}$에 대하여 대칭이다. 따라서

$\displaystyle\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=4\int_{0}^{\frac{1}{2}}f(x)dx$이다.

58.

곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 위의 점 $\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$에서의 접선에 수직인 직선의

방정식은 $y=-\dfrac{1}{t}(x-t)+\dfrac{1}{2}t^2$이다. 따라서 점 Q의 좌표는

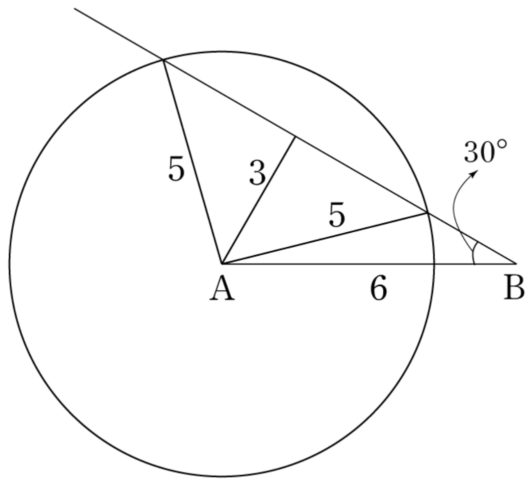
$\left(0,\ \frac{1}{2}t^2+1\right)$이다. 선분 OQ의 길이는 $\frac{1}{2}t^2+1$이고 선분 PQ의 길이는 $\sqrt{t^2+1}$이다.

따라서,

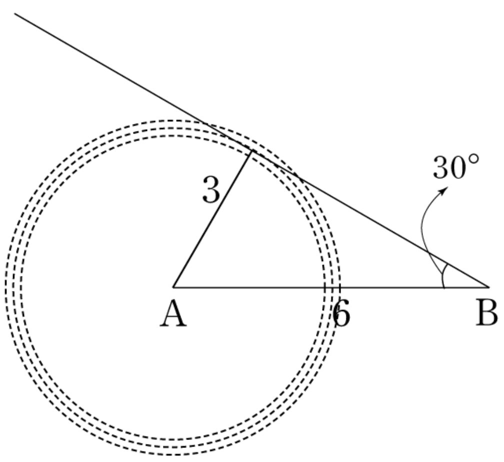
$$\lim_{t\to+0}\frac{\frac{1}{2}t^2+1-\sqrt{t^2+1}}{t^4}=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{1}{4}t^4}{t^4\left(\frac{1}{2}t^2+1+\sqrt{t^2+1}\right)}=\frac{1}{8}\text{이다.}$$

59.

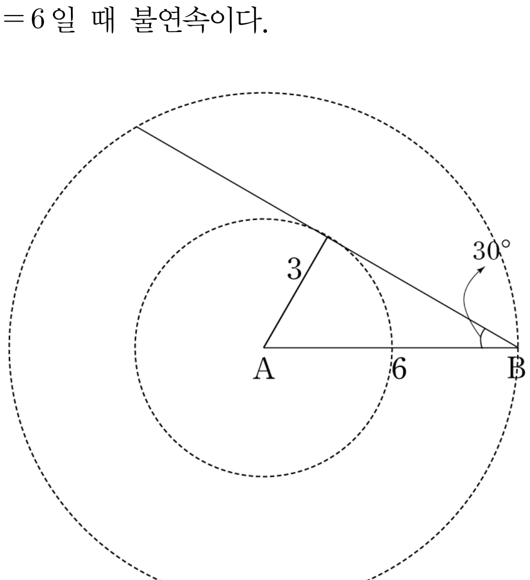
ㄱ. 다음 그림에서 삼각형을 총 2개 만들 수 있다. (점 A를 중심으로 하는 원을 점점 크게 하여, 점 B를 지나는 반직선과 만나는 점을 꼭짓점 C라 한다. 교점의 개수가 만들 수 있는 삼각형의 개수이다.)



ㄴ. $x<3$이면, 삼각형은 0개 만들어진다.
반면, $x>3$이면 삼각형이 2개 만들어진다.



ㄷ. $a=3$, $a=6$일 때 불연속이다.



60.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^2}{x^2+5x}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+x}{f(x)-1}=\infty$에서 $f(x)-1=3(x-2)(x-\alpha)$이다.

$\alpha\neq2$인 경우, $f(x)-1$은 $x=2$를 기준으로 좌우 부호가 바뀐다.

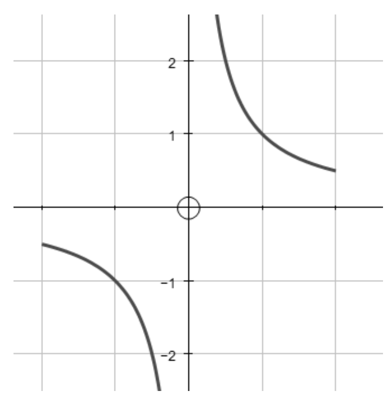
따라서, $\lim_{x\to2+0}\frac{f(x)+x}{f(x)-1}$과 $\lim_{x\to2-0}\frac{f(x)+x}{f(x)-1}$는 ∞ 또는 $-\infty$의 값을 각각 하나씩 갖는다. 따라서 $\alpha=2$인 경우에

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+x}{f(x)-1}=\lim_{x\to2}\frac{3(x-2)^2+x+1}{3(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\left(1+\frac{x+1}{3(x-2)^2}\right)=\infty$이 성립한다.

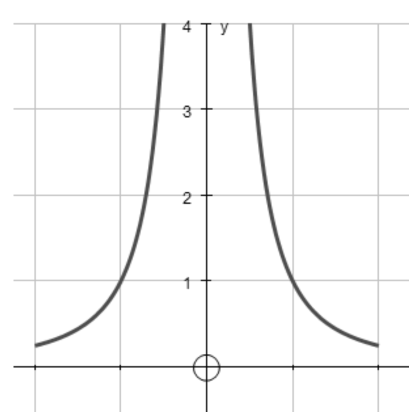
그러므로 $f(x)=3(x-2)^2+1$이다. $f(5)=28$이다.

〈참고〉

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$는 표현할 수 없다. (미통기 교과서의 발산에 대한 설명 참고)



(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$이다. (미통기 교과서의 발산에 대한 설명 참고)



61.

ㄱ. $t=1$에서 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$이다. 이 식을 미분하면

$f'(x)=x^3-4x$이다. 따라서 $x=2$ 또는 $x=-2$에서 최솟값을 갖는다. 이 값을 대입하면 $f(2)=4-8+3=-1$이다.

ㄴ. $f'(x)=x^3-4tx$에서 $t>0$이면 $x=\pm2\sqrt{t}$에서 최솟값을 갖고, $t\le0$이면 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.

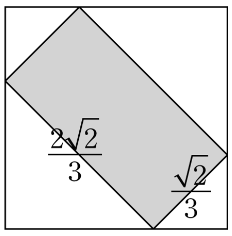
$f(2\sqrt{t})=4t^2-8t^2+3t^2=-t^2$이고, $f(0)=3t^2$이다.

따라서 $t=0$에서는 $g(t)$가 미분가능하다.

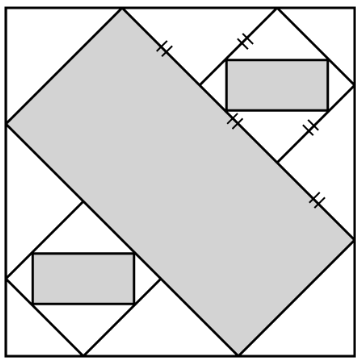
ㄷ. $\int_{-3}^{0}3t^2\,dt-\int_{0}^{3}t^2\,dt=27-9=18$

정답 및 해설

62.
첫째항은 다음 그림과 같다.



따라서, $S_1 = \frac{4}{9}$이다.
다음 그림을 살펴보면, 다음과 같다. 따라서, 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{2\sqrt{2}}{9}$이다.



따라서, $S_1 = \frac{4}{9}$이고 공비는 $2\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$이다.
따라서, 구하는 답은 $\frac{4}{9} \times \frac{1}{1-\frac{16}{81}} = \frac{36}{65}$이다.

63.
$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1$에서 $f(-2) = 5$이고 $f'(-2) = 0$이다.
따라서, $-16 + 4a - 2b + 1 = 5$에서 $2a - b = 10$이다.
또한 $24 - 4a + b = 0$에서 $4a - b = 24$이다.
따라서 $a = 7$, $b = 4$이다.
$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x + 1$이고 $f'(x) = 6x^2 + 14x + 4$이다.
$(3x+1)(x+2)$이므로 $x = -\frac{1}{3}$에서 극댓값을 갖는다.
$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{27} + \frac{7}{9} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{-2+21-36+27}{27} = \frac{10}{27}$이다.

64.
$x = 3$에서 $|f(x)|$가 미분가능하지 않으려면, $|f(x)|$가 $x = 3$을 기준으로 한 쪽은 $-f(x)$, 한 쪽은 $f(x)$이어야 가능하다. 즉, $f(3) = 0$이다. 한편, $x = 1$에서는 미분가능해야 한다. 따라서, 두 가지 가정이 가능하다.

$x \geq 1$이고 충분히 1에 가까운 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이면 $g(x)$는 $x = 1$에서 불연속이다. 따라서, $x = 1$에서 미분가능하지 않다.
그러므로, $|f(x)|$가 $x \geq 1$일 때 $-$를 붙이고 나온다.
이 경우, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)+2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{-f(x)-2}{x-1}$이어야 한다.
따라서, $f'(1) = -f'(1)$에서 $f'(1) = 0$이다.
$f(x) = k(x-1)^2 - 2$이면서 $f(3) = 0$이려면 $k = \frac{1}{2}$이다.
따라서, $g(7) = 16$이다.

65.
문제에 주어진 조건을 정리하면 $f(2) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(0) \neq 0$, $f'(2) \neq 0$이다.
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$에서 $f'(0) = 0$이므로 $b = 0$이고
$f(2) = 0$이므로
$8 + 4a + 2b + c = 8 + 4a + c = 0$이다. 따라서
$f(x) = x^3 + ax^2 - (4a+8)$이다.
이를 정리하면, $f(x) = x^3 - 8 + a(x^2 - 4)$이다.
한편, $f(0) \neq 0$이므로 $a \neq -2$이고, $f'(2) \neq 0$이므로 $a \neq -3$이다.

ㄱ. $f(0) = -4a - 8 < 0$이면 $a > -2$이다. $f'(2) = 12 + 4a > 4$이다. (참)
ㄴ. $f(0) = -4a - 8 > 0$이면 $a < -2$이다.
$f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$이므로,
$x = 0$에서 극댓값, $x = -\frac{2}{3}a$에서 극솟값을 갖는다. (참)
ㄷ. $a \neq -3$이므로 $f(-1) \neq 0$이다. $f(2) = 0$이므로 $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-3)}{f(x)}$이 존재하지 않는다. (참)

66.
$h(x) = f(-x)$라 하자.
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$,
$h(x) = f(-x) = ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e$라 하자.
(가)에 의해 $h(1) - f(1) = -2b - 2d = 2$이다.

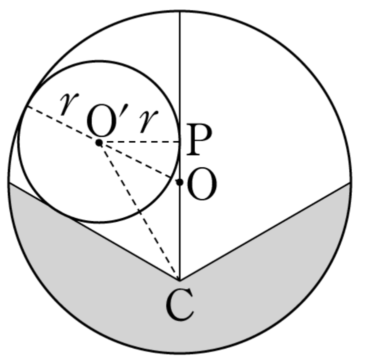
$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x^2) - g(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{g(x^2) - g(1) + g(1) - g(x)}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1} \left(\frac{g(x^2) - g(1)}{x-1} - \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \right)$$
$$\lim_{x \to 1+} \left(\frac{g(x^2) - g(1)}{x^2 - 1} \cdot (x+1) - \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \right) = 2h'(1) - h'(1) = h'(1)$$
$$\lim_{x \to 1-} \left(\frac{g(x^2) - g(1)}{x^2 - 1} \cdot (x+1) - \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \right) = 2f'(1) - f'(1) = f'(1)$$

극한값이 존재해야하므로 $h'(1) = f'(1)$이므로 $6b + 2d = 0$이다.
따라서 $b = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{3}{2}$이므로 $f(3) - g(3) = 54b + 6d = 18$이다.

67.
A_n의 무게중심의 y좌표가 a_n이므로 P_n, P_{n+1}또한 y좌표만을 이용하여 a_{n+1}을 다음과 같이 표현할 수 있다.
$$a_{n+1} = \frac{2^n + 2^{n+1} + a_n}{3}$$
이를 문제에서 원하는 모양으로 바꾸어 대입하자.
$3a_{n+1} - a_n = 2^n + 2^{n+1}$
따라서, $\lim_{n \to \infty} \frac{3a_{n+1} - a_n}{2^n + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n + 2^{n+1}}{2^n + 1} = 3$ 이다.

정답 및 해설

68.



원 O′은 원 O에 내접하는 원이므로 두 원의 중심을 이으면 접점과도 연결이 된다. $\overline{OO'}=1-r$이다. $\angle OCO'=30^\circ$이므로 $\angle PO'C=60^\circ$이고 $\overline{CO'}=2r$ 임을 알 수 있다. $\overline{CP}=\sqrt{3}r$이고 $\overline{CO}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 $\overline{OP}=\sqrt{3}r-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

삼각형 OPO′에 대해 피타고라스 정리를 쓰면

$(1-r)^2=\left(\sqrt{3}r-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+r^2$ 이고, $r^2=\frac{2}{9}$, $r=\frac{\sqrt{2}}{3}$이다.

첫 번째 원과 두 번째 원의 반지름 비가 $1:\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로 변의 비는 $\frac{\sqrt{2}}{3}$이고, 넓이의 공비는 $\frac{2}{9}$이다. 개수도 2배로 증가하므로 총 공비는 $\frac{2}{9}\times 2=\frac{4}{9}$이다.

초항 $S=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{10}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{15}=\frac{9}{10}\pi-\frac{3\sqrt{3}}{5} \text{ 이다.}$$

69.

$f(1)=0$

$$\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\frac{4}{3}$$

70.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (x<-1)\\ 1-x^2 & (-1\le x\le 1)\\ x^2-1 & (x>1)\end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0+}\frac{((1+h)^2-1)-(1-(1-h)^2)}{h^2}=2$$

71.

두 무한등비수열의 공비를 각각 r_1, r_2라고 하면

$a_n=a_1(r_1)^{n-1}$, $b_n=b_1(r_2)^{n-1}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\left(\frac{r_2}{(r_1)^2}\right)^{n-1}=14\text{이다.}$$

이를 통해 $\left(\frac{r_2}{r_1^2}\right)=1$ 이고, $\frac{b_1}{a_1}=14$임을 알 수 있다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}}{a_n}=16$, 무한급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n-1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{a_1}\left(\frac{(r_2)^2}{r_1}\right)^{n-1}=0$$

위에서 구한 값들을 무한급수에 대입해보면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{b_1}{a_1}}{1-\left(\frac{(r_2)^2}{r_1}\right)}=\frac{14}{1-(r_1)^3}=16\text{이고 } r_1=\frac{1}{2}\text{이다.}$$

따라서 $r_1=\frac{1}{2}$, $r_2=\frac{1}{4}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{\frac{b_1}{a_1}}{1-\frac{r_2}{r_1}}=\frac{14}{1-\frac{1}{2}}=28$ 이다.

72.

사차함수를 미분하면 $f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)$ 임을 알 수 있다. 그래프를 그려보면, $f(1)=f(3)=-9$, $f(2)=-8$이다.

$f(x)$가 0부터 1까지는 감소하므로 $f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)<0$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|=f(0)-f(1)$이다.

$f(x)$가 1부터 2까지는 증가하므로 $f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)>0$이다.

따라서 $\sum_{k=n+1}^{2n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|=f(2)-f(1)$이다.

$f(x)$가 2부터 3까지는 감소하므로 $f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)<0$이다.

따라서 $\sum_{k=2n+1}^{3n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|=f(2)-f(3)$이다.

$f(x)$가 3부터 4까지는 증가하므로 $f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)>0$이다.

따라서 $\sum_{k=3n+1}^{4n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right|=f(4)-f(3)$이다.

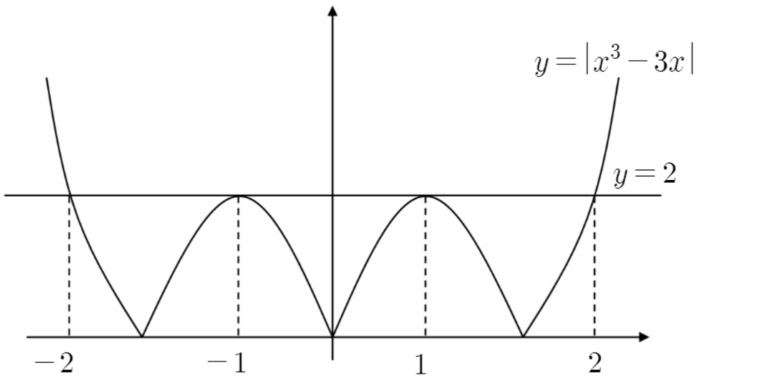
따라서 위 네 식을 모두 더하면

$f(0)-2f(1)+2f(2)-2f(3)+f(4)=20$이다.

따라서 $\frac{20}{n}<3$인 n의 최솟값을 구하면 되므로, $n=7$이다.

73.

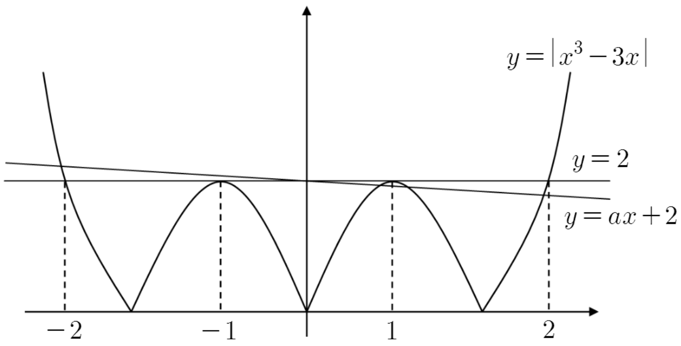
함수 $y=x^3-3x$를 미분하면 $x=-1$일 때 극댓값 2, $x=1$일 때 극솟값 -2를 갖는 것을 알 수 있다. 그러므로 함수 $y=|x^3-3x|$의 그래프는 다음과 같이 그려진다.



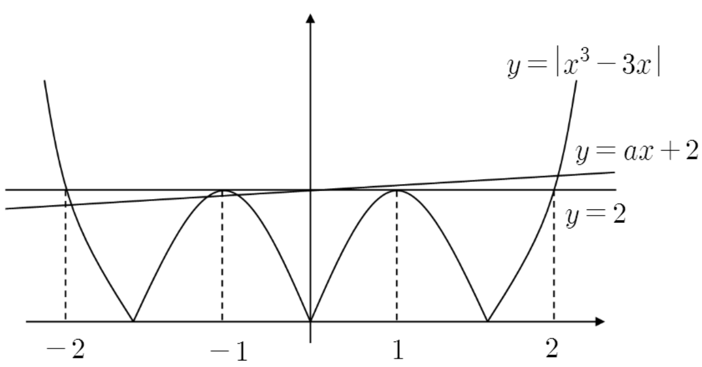
그러므로 $a=0$일 때 직선 $y=2$와 함수 $y=|x^3-3x|$는 다음과 같이 $x=-2$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$에서 만나게 된다.

정답 및 해설

($y=\pm(x^3-3x)$와 직선 $y=2$를 연립시키면 $x=-2$와 $x=2$에서 만난다는 사실을 알 수 있지만, 풀이의 완결성을 위해 표기했을 뿐 문제 풀이에는 전혀 필요하지 않다.)



$a<0$일 때 직선 $y=2$와 함수 $y=|x^3-3x|$는 다음과 같이 그려진다. a를 무한히 0에 가깝게 보내면 $y=2$와 함수 $y=|x^3-3x|$는 그림과 같이 $x=1$ 주위에서 두 개의 교점을 갖게 된다. 그러므로 $\lim\limits_{a\to 0-}f(a)=(-2)+1+1+2=2$이다.

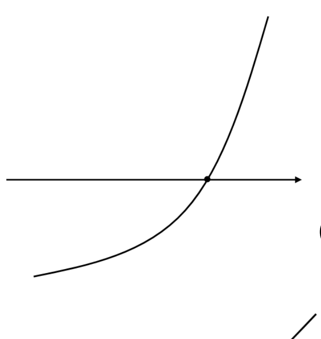


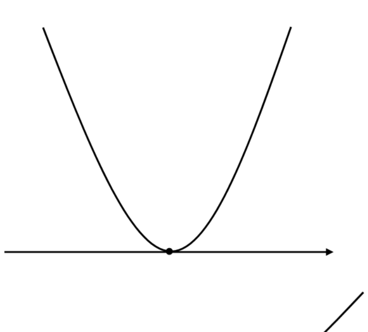
$a>0$일 때 직선 $y=2$와 함수 $y=|x^3-3x|$는 다음과 같이 그려진다. a를 무한히 0에 가깝게 보내면 $y=2$와 함수 $y=|x^3-3x|$는 그림과 같이 $x=-1$ 주위에서 두 개의 교점을 갖게 된다. 그러므로 $\lim\limits_{a\to 0+}f(a)=(-2)+(-1)+(-1)+2=-2$이다.

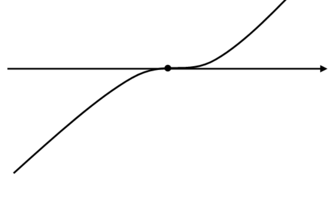
그러므로 $\lim\limits_{a\to 0-}f(a)-\lim\limits_{a\to 0+}f(a)=4$ 이다.

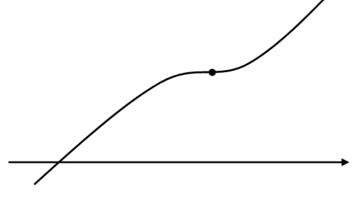
74.

그래프를 그려가며 생각하면 함수 $g(x)h(x)$가 $x=a$에서 불연속이 되기 위해서는 $f(a)=0$이거나 $f'(a)=0$이어야 한다는 것을 발견할 수 있을 것이다.

(1)


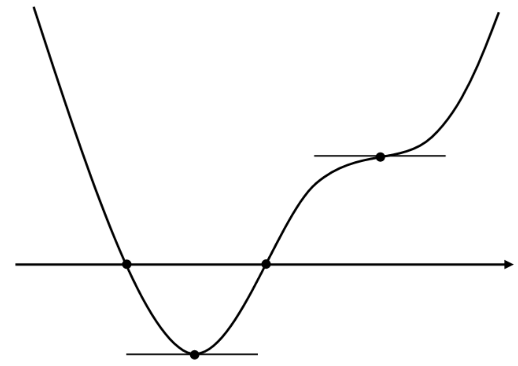
(2)


(3)


(4)


다음과 같이 그래프를 그려가며 함수 $g(x)h(x)$가 $x=a$에서 불연속이지만 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$의 값이 존재하는 상황을 생각해보자. 그래프를 그려가며 생각하다 보면 네 번째 그래프과 같이 $f(a)\neq 0$, $f'(a)=0$이지만 함수의 증감은 바뀌지 않는 상황일 때만 좌우 극한값이 동일하다는 것을 알 수 있다.

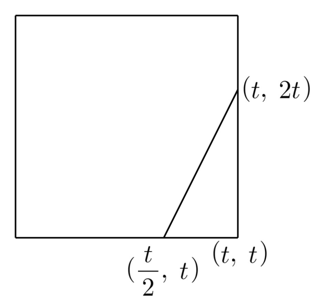
그렇다면 $f'(x)$를 이용해 생각하면 가능한 도함수는 $f'(x)=4x^2(x-a)$꼴뿐이라는 것을 알 수 있다. $f'(a)=0$일 때 함수 $g(x)h(x)$가 $x=a$에서 불연속이고, 함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로 반드시 $a=3$이어야 한다는 것을 알 수 있다.



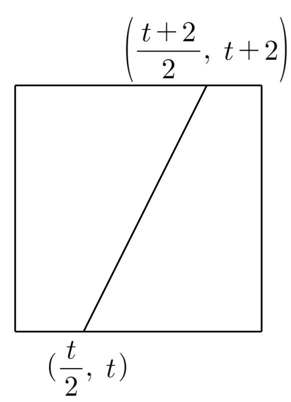
결국 $f(x)=x^4-4x^3+k$로 나타낼 수 있다. 그런데 그림과 같이 방정식 $f(x)=0$의 근이 둘 이상일 경우 함수 $g(x)h(x)$는 반드시 세 점 이상에서 불연속이 된다. 결국, 방정식 $f(x)=0$의 근은 오로지 하나만 존재하며, $x=3$일 때 함수 $f(x)$의 값이 최소이므로 $f(3)=0$이다. 그러므로 $k=27$이고, $f(5)=152$이다.

75.

i) $0<t<2$일 때 아래 그림과 같으므로 $f(t)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}t$ 이다.

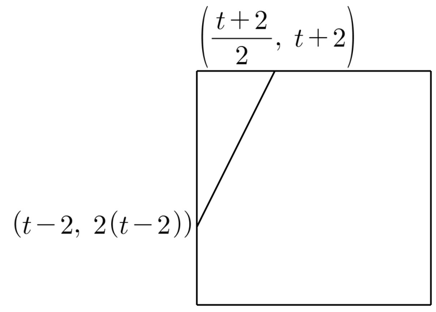


ii) $2\le t<4$일 때 아래 그림과 같으므로 $f(t)=\sqrt{5}$ 이다.



iii) $4\le t<6$일 때 아래 그림과 같으므로

$f(t)=\sqrt{\left(\dfrac{6-t}{2}\right)^2+(6-t)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(6-t)$이다.



따라서 $t=2$, $t=4$에서만 미분가능하지 않다.

정답 및 해설

76.
$(b_n)^2=(a_n)^2$에서 수열 b_n의 의미는 수열 b_n의 절댓값은 등비수열을 의미한다.

$2<\sum_{n=1}^{\infty}b_n<3$이기 위해선, 일단 $b_1=8$이어야 한다. $b_1=-8$일 경우 b_2부터 차례로 $+4$, $+2$, …이렇게 진행되어도 절대 저 범위 안에 들어갈 수 없기 때문이다. $b_2=-4$인데, 마찬가지 이유에서다.
$b_3=-2$, $b_4=1$임을 알 수 있다. 따라서 $b_2+b_4=-3$이다.

77.
(가) 조건을 해석하면 $f(0)=-4$임을 알 수 있다.
(나) 조건을 해석하기 위해 식을 변형하자.
$\lim_{x\to4}\frac{1}{x-4}\int_0^x f(t)dx=\lim_{x\to4}\frac{F(x)-F(0)}{x-4}$이므로
극한값이 어떤 값으로 수렴하기 위해서는 분모가 0이 될 때 분자도 0이 된다는 점을 활용하자. $F(4)-F(0)=0$이다.
또한, $F(0)$ 대신 $F(4)$를 대입하면 $f(4)=20$이다.
그러므로 $F(4)-F(0)=0$에서 $\int_0^4 f(x)dx=0$이다.
삼차함수 $f(x)$를 x^3+ax^2+bx+c로 놓자. $f(0)=-4$이므로 $c=-4$이다. $f(4)=64+16a+4b-6=20$이므로 정리하면
$10+4a+b=0$이다. …(가)
$\int_0^4 f(t)dt=\frac{1}{4}4^4+\frac{a}{3}4^3+\frac{b}{2}4^2-4\cdot4=0$이므로
$18+8a+3b=0$이다. …(나)
(가) 식과 (나) 식을 연립하여 정리하면 $a=-3$, $b=2$이므로
$f(x)=x^3-3x^2+2x-4$이다. 그러므로 $f(5)=56$이다.

78.
$A\star(B\star C)$를 벤-다이어그램에 그려보면, A, B, C 중 하나에만 속하거나, 혹은 모두 속하는 부분만 칠해짐을 알 수 있다.
각 선지별로 조사해보자.
① A에 속하고 B, C에 속하지 않음.
② A, B, C에 모두 속함.
③ B에 속하고 A, C에 속하지 않음.
④ A, B, C에 모두 속함.
⑤ B, C에 속하고 A에 속하지 않음. 따라서 답은 ⑤이다.

79.
국어, 수학, 영어, 사회탐구영역을 모두 공부하면서 5시간을 공부해야 하므로 두 시간을 공부할 과목을 고르는 경우의 수는 4가지이다.
두 시간 공부하는 과목을 A라 하면 한 시간마다 과목을 바꿔서 모든 과목을 공부하게 되므로 AABCD를 같은 것이 이웃하지 않게 나열하면 된다.
따라서 AABCD를 같은 것을 포함한 순열에서 AA가 이웃한 경우를 빼주면 된다.
따라서, $4\times\left(\frac{5!}{2!}-4!\right)=144$ 이다.

4!이 되는 이유는 AA가 같은 것이기 때문에 하나로 묶어서 볼 수 있기 때문이다.

80.
반드시 두 대륙은 두 나라를 모두 여행하게 되므로 한 대륙에서 한 나라만 여행하는 경우의 수는 $3\times2=6$ 가지이다.
같은 대륙에 있는 나라는 연속해서 여행하게 되므로 여행할 대륙의 순서를 정하고 나라의 순서를 정해주면 된다.
대륙의 순서를 정하고 연속하여 여행하는 경우의 수 : $3!\times2\times2$
따라서 전체 경우의 수는 $6\times3!\times2\times2=144$

81.
첫째, 둘째, 셋째 글자 모두 '현' 이 존재하므로 첫째 글자가 '현' 이 아닌 경우와 '현 '인 경우로 나눠보자

1) 첫째 글자가 '현' 이 아닌 경우

첫째 자리에 올 수 있는 경우의 수 : 3 가지
둘째 자리에 올 수 있는 경우의 수 : 4 가지
셋째 자리에 올 수 있는 경우의 수 : 3 가지

둘째 자리와 셋째 자리에 있는 글자는 동일하므로 셋째 자리에 오는 글자는 둘째 자리에서 고른 글자만 빼면 된다.
단, 문제 조건에서 '민' '수' 가 연속되어 나오면 안된다.
따라서 '민' '수' 가 연속으로 나오는 경우는 3가지이므로 이를 빼주면 된다.

따라서 $3\times4\times3-3=33$ 가지이다.

2) 첫째 글자가 '현' 인 경우
두 번째와 세 번째 글자에는 '현' 이 올 수 없다.

둘째 자리에 올 수 있는 경우의 수 : 3가지
셋째 자리에 올 수 있는 경우의 수 : 2가지
그런데 여기서도 '민' '수' 가 연속되어 나오는 경우가 1가지 존재한다.
따라서 $3\times2-1=5$ 가지이다.
따라서 전체 경우의 수는 38 가지이다.

82.
세 과목군에서 4과목을 선택하는 경우는
(지리, 역사, 일반사회) : (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2)이다.

1) 과목군에서 (2,1,1)의 형태로 고르는 경우
역사 과목군에서는 한 과목 밖에 선택하지 못하므로 국사를 고를 수 없다.
지리 과목군에서 고르는 경우의 수 : ${}_3C_2$ 가지
역사 과목군에서 고르는 경우의 수 : 2 가지
일반사회 과목군에서 고르는 경우의 수 : 5가지

따라서 (2,1,1)의 형태로 고르는 경우의 수는 $3\times2\times5=30$가지이다.

2) 과목군에서 (1,2,1)의 형태로 고르는 경우
역사과목군에서 국사를 고르는 경우와 고르지 않는 경우로 나눌 수 있다.

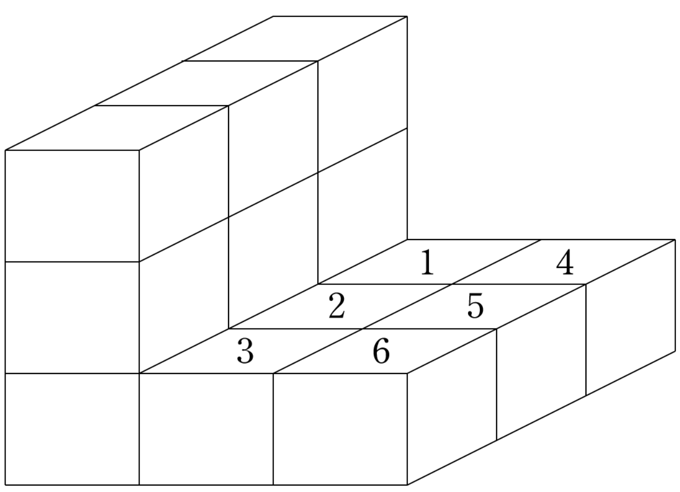
정답 및 해설

2－1) 국사를 고르는 경우
국사를 고르면 반드시 한국 근현대사도 골라야 하므로 역사 과목군에서 고르는 경우의 수는 1가지이다.
경우의 수 : $3\times1\times5$ 가지이다.
2－2) 국사를 고르지 않는 경우
국사를 고르지 않아도 역사과목군에서 두과목을 고르는 경우는 세계사와 한국 근현대사를 고르는 경우 한가지 뿐이므로 위와 동일하다.
경우의 수 :$3\times1\times5$ 가지

3) 과목군에서 (1,1,2)를 선택하는 경우
지리 과목군에서 고르는 경우의 수 : 3 가지
역사 과목군에서 고르는 경우의 수 : 2 가지
일반사회 과목군에서 고르는 경우의 수 : ${}_5C_2$가지
경우의 수 : $3\times2\times10=60$ 가지

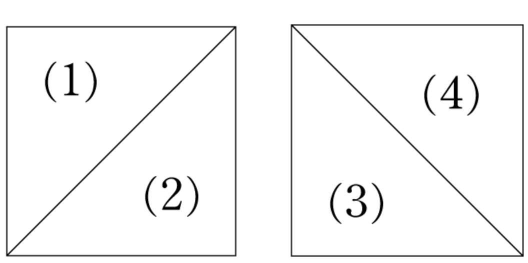
따라서 전체 경우의 수는 $30+15+15+60=120$가지이다.

83.
앞, 위, 옆에서 본 모양을 맨 아래층과 맨 왼쪽줄은 3×3으로 꽉 차있음을 알 수 있다.

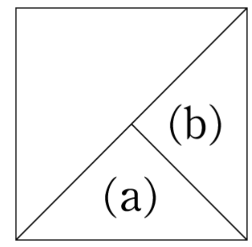


위의 그림은 위에서 본 모양과 옆에서 본 모양을 만족한다. 앞에서 본 모양을 만족시키기 위해서 (1,2,3)을 2열, 3열을 (4,5,6) 이라고 하면 2열과 3열 중 각각 한 칸은 반드시 헌개씩 더 쌓여야 한다.
2열을 보면 1,2,3중 적어도 하나만 한 개가 더 쌓이면 되므로 2^3-1가지가 된다.
3열도 2열과 같이 적어도 한 칸에만 더 쌓이면 되므로 동일하게 여사건을 이용하면 2^3-1가지가 된다.
따라서 총 경우의 수는 $(2^3-1)(2^3-1)=49$개다.

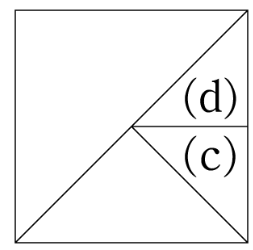
84.



빨간색을 칠하는 경우



검은색을 칠하는 경우



초록색과 파란색을 칠하는 경우

빨간색은 위의 그림처럼 칠할 수 있는 방법이 (1) (2) (3) (4) 네 가지이다.
빨간색을 칠한 경우 검은 색을 칠하는 경우는 $(a)\,(b)$ 두 가지이다.
검은색까지 칠하면 초록색과 파란색을 칠하는 방법은 두 가지이다.
따라서 총 경우의 수는 $4\times2\times2!=16$가지이다.

85.
전체 경우는 중복을 허락하여 5개중 3개를 뽑는 경우이다 :${}_5H_3$
A가 나오지 않는 경우는 4개중에 중복하여 3개를 뽑는 경우이므로 ${}_4H_3$ 이다.
A가 한 개 이상 나오는 경우는 전체 경우에서 A가 하나도 나오지 않는 경우를 빼면 된다.
따라서 경우의 수는 ${}_5H_3-{}_4H_3={}_7C_3-{}_6C_3=15$ 이다.

86.
1) 철수와 영희가 10열에 앉는 경우 :
서로 자리를 바꿀 수 있으므로 $2\times3!$
2) 철수와 영희가 11열에 앉는 경우 :
(A,B) or (B,C)에 앉을 수 있고 자리를 바꿀 수 있으므로 $2\times2\times3!$
3) 전체 경우의 수 : 일렬로 세우는 것과 같으므로 $5!$

따라서 철수와 영희가 같은 열에 이웃하여 앉을 확률은
$\frac{2\times3!+2\times2\times3!}{5!}=\frac{3}{10}$ 이다.

87.
C 회사의 시장점유율은 모비율과 같으므로 $p=\frac{1}{10}$이다.
표본비율$(\hat{p})$이 정규분포 $N\left(\frac{1}{10},\left(\frac{1}{50}\right)^2\right)$을 따른다. 구하는 값은
$P\left(\hat{p}\ge\frac{27}{225}\right)$ 이므로 표준화하면 $P\left(\hat{p}\ge\frac{\frac{27}{225}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{50}}\right)=P(z\ge1)$ 이다.
따라서 구하고자하는 확률은 $P(Z\ge1)=0.5-0.3413=0.1587$ 이다.

정답 및 해설

88.
주어진 식의 $_{n}\mathrm{H}_{7-n}$을 C로 변환해보면 $_{6}\mathrm{C}_{7-n}$ 임을 알 수 있다.
즉, 주어진 식은 $\sum_{n=1}^{7} {}_{6}\mathrm{C}_{7-n} = 2^6$이다.

89.
$x+y+z=-3$
$-3 \le x, y, z \le 3$ x, y, z의 범위가 동일하다.
모든 변수 x, y, z에 3을 더해주면 음수에서 양수범위가 아닌 양수 범위에서만 계산이 가능하다. 문제는 다음과 같이 바뀐다.
$(x+3)+(y+3)+(z+3)=6,\quad 0 \le x+3, y+3, z+3 \le 6$
따라서 이는 $x'+y'+z'=6$이므로 $_{3}\mathrm{H}_{6}=28$ 이다.

90.
회전을 고려하지 않고 칠하는 경우의 수는 4!가지이다.
그러나 회전을 하면 같은 경우가 한번 생기기 때문에 2쌍씩 묶을 수 있게 된다.
따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2}=12$가지가 된다.

91.
10원짜리와 500원짜리는 문제가 없지만 50원 짜리 동전은 2개가 모이면 100원의 역할을 하기 때문에 문제를 해결함에 있어서 이 부분을 생각해 볼 수 있다.
만일 50원을 2개 골랐다면 100원이 되고 3개를 더 고를 수 있다. 이때 이 3개를 100원으로 모두 뽑아서 400원을 만들더라도 다른 방법으로 400원을 만들 수 없다. 즉 50원을 짝수 개 고르게 됨으로 만드는 금액은 다른 방법으로 만드는 금액과 중복되지 않는다는 점을 통해 단순한 중복순열로 만들 수 있다.

따라서 10원을 a, 50원을 b, 100원을 c, 500원을 d 라고 하면 $a+b+c+d=5$ (단, $a, b, c, d \le 4$)인 중복순열이 된다.
문제는 각 동전이 최대 4개인데 위 중복순열에서는 각 동전이 5인 경우가 나온다. 즉 중복순열 값인 $_{4}\mathrm{H}_{5}$에서 각 동전이 5개가 되는 경우인 $(5,0,0,0), (0,5,0,0), (0,0,5,0), (0,0,0,5)$ 경우 4가지를 빼주면 된다. 따라서 만들 수 있는 금액의 경우의 수는
$_{4}\mathrm{H}_{5}-4={}_{8}\mathrm{C}_{5}-4=52$ 가지이다.

92.
어느 대학교 학생의 운전면허 소지자 : $\frac{5}{8}$

운전면허 소지자중 1종 면허 소지자 : $\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$

192명을 임의 추출 했을 때 1종 면허를 소지하고 있는지는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192, \frac{1}{4}\right)$를 따른다.
n이 충분히 크기 때문에 이항분포를 정규분포로 근사하면 위의 이항분포는 $\mathrm{N}(48, 6^2)$을 따른다.
구하고자하는 $\mathrm{P}(\mathrm{X} \le 57)$를 표준정규분포로 바꾸어 풀면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \le 57) &= \mathrm{P}\left(\frac{X-48}{6} \le \frac{57-48}{6}\right) = \mathrm{P}(Z \le 1.5) \\ &= \mathrm{P}(Z \le 0) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) \\ &= 0.5 + 0.4332 = 0.9332\end{aligned}$$

이다.

93.
4의 배수가 되는 경우를 구하는 것은 중복되는 경우를 제외해야 하므로 여사건을 이용하여 4의 배수가 아닌 경우를 찾는 것이 더 좋다.

4의 배수 아닌 경우
1) 모두 홀수가 나오는 경우 : $_{4}\mathrm{C}_{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

2) 2 또는 6이 하나만 나오는 경우 : $_{4}\mathrm{C}_{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$

따라서 4의 배수가 나오는 경우는 $1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\right)=\frac{37}{48}$ 이다.

94.
먼저 문제에서 준 자료만으로 표를 만들면 다음과 같다.

	중국어	일본어	합계
물리	(a)	27	$(27+a)$
화학	$(64-a)$	(9)	$(73-a)$
합계	64	(36)	100

이 학교에서 임의로 택한 학생이 물리 수업을 받는 사건(A)과 중국어를 받는 사건(B)이 독립이므로 $\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)$를 만족시킨다.
$\frac{27+a}{100}\times\frac{64}{100}=\frac{a}{100}$, $a=48$
이 학교의 학생 중 화학 수업을 받는 학생은 $73-48=25$명이다.

95.
집합 B의 원소는 결국 집합 A에서 가져온 원소들이므로 5개의 원소중 중복을 허락하여 3개를 뽑는 중복조합이 된다.
이때 2와 4는 $2\times2=1\times4$가 되기 때문에 $(2,2,k)$를 뽑는 경우와 $(1,4,k)$를 뽑는 경우는 결과적으로 B에서 원소가 중복되게 된다.
따라서 $_{5}\mathrm{H}_{3}={}_{7}\mathrm{C}_{3}=35$이고 위의 중복되는 경우는 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$인 5가지 경우이므로 구하고자 하는 집합 B의 원소의 개수는 $35-5=30$개다.

96.
다항식을 $\left(2x^2-\frac{1}{4}\right)^8$의 계수를 표현하면 $_{8}\mathrm{C}_{k}(2x^2)^{8-k}\left(-\frac{1}{4}\right)^k$이다.
계수가 정수인 항을 구하기 위해 식을 변형하면
$_{8}\mathrm{C}_{k}(x^2)^{8-k}(-1)^k(2)^{8-3k}$가 된다.

1) $k=0,1,2$ 인 경우
$8-3k \ge 0$ 이므로 항상 정수이다.

2) $k=3$ 인 경우
식에 대입하고 계산을 해보면
$_{8}\mathrm{C}_{3}(-1)^3(2)^{-1}=-28$ 이므로 정수이다.

3) $k=4$인 경우
이항계수 식에 대입을 하면 $_{8}\mathrm{C}_{4}(-1)^4(2)^{-4}$이다.
이 값이 정수가 되기 위해서는 $_{8}\mathrm{C}_{4}$가 2^{-4}을 상쇄시킬 수 있어야

정답 및 해설

한다. ${}_8C_4=\frac{8!}{4!4!}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}$인데 2^{-4}을 상쇄시킬 수 없다.
따라서 $k=4$인 경우는 정수가 되지 않는다.

4) $k\geq5$인 경우
$k=5$이면 ${}_8C_5(-1)^5(2)^{-7}$이다.
이때 ${}_8C_k$의 최대값은 $k=4$일 때 이므로 ${}_8C_5$는 ${}_8C_4$보다 작아진다.
즉, $k\geq5$에서는 ${}_8C_k$의 값이 점점 작아지는데 상쇄시켜야하는 값인 2^{8-k}가 훨씬 커지게 되므로 정수가 될 수 없다.
따라서 주어진 식의 계수가 정수인 항의 개수는 4개다.

97.
광역버스 A, B가 하루 동안 경고음이 울린 시간을 확률변수 X_A, X_B 라고 하고, 두 확률변수가 정규분포를 따른다.
구하고자하는 $P(X_A\geq t)=P(X_B\leq t)$ 표준화 하면
$P\left(z\geq\frac{t-90}{10}\right)=P\left(z\leq\frac{t-80}{15}\right)$이다.

두 확률이 같다는 것은 원점을 기준으로 대칭인 구간을 각각 적분했다는 것이므로 $\frac{t-90}{10}=-\left(\frac{t-80}{15}\right)$이고 $t=86$ 이다.

98.
주어진 이항분포 $B(n,p)$를 통해 확률 변수 X의 평균과 분산을 나타내면 $E(X)=4p$, $V(X)=4p(1-p)$ 이다.
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서 $E(X^2)=3p+1$ 이므로
$V(X)=3p+1-(4p)^2=4p(1-p)$
따라서 방정식 $12p^2+p-1=0$ 을 풀게 되면
$p=\frac{1}{4},-\frac{1}{3}$ 인데 $0<p<1$이므로 $p=\frac{1}{4}$, $V(X)=\frac{3}{4}$ 이다.
$V(10X)=100V(X)=75$

99.
동전의 앞면이 나온 횟수를 확률변수 X라고 하자.

1) 주사위가 3의 배수인 경우
동전의 앞면이 0개 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ 동전의 앞면이 1개 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$
2) 주사위가 3의 배수가 아닌 경우
동전의 앞면이 0개 : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$ 동전의 앞면이 1개 : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$
동전의 앞면이 2개 : $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$

이를 확률분포표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서, $E(X)=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$이다.

100.
1)세 장이 같은 카드인 경우 : ${}_4C_1\times{}_3C_1\times\frac{4!}{3!}=48$
2)두 장만 같은 카드인 경우 : ${}_4C_1\times{}_3C_2\times\frac{4!}{2!}=144$
3)두 장씩 쌍으로 같은 경우: ${}_4C_2\times\frac{4!}{2!2!}=36$
4)네 장 모두 다른 카드인 경우 : 4!

따라서 만들 수 있는 서로 다른 4자리 숫자의 개수는 252개이다.

101.
$x^2+y^2=25$ 은 x축, y축, 혹은 $x=y$에 대하여 대칭이므로 편한 축을 기준으로 대칭됨을 생각하여 구해보자. 물론 축상의 점들이 존재한다는 점도 인식하고 있어야한다.

가장 편하게 생각할 수 있는 y축에 대해 대칭임을 이용하여 정수점을 파악해보자.

1) y축 상에 존재하는 정수점
$x=0$ 이므로 $(0,5),(0,-5)$ 두 점이 존재한다.

2) $0<x\leq5$ 인 경우
$x^2+y^2=25$을 만족하는 (x,y) 는
$(3,4),(3,-4),(4,3),(4,-3),(5,0)$으로 5개 존재한다.
이를 대칭시키면 y축 이 아닌 원 위의 정수 점은 총 10개다.

즉, 원 위의 정수점의 개수는 총 12개이고 x좌표가 3일 확률은 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$이다.
따라서 $p^2+q^2=37$ 이다.

102.
문제에서 주어진 두 식을 이용해보자.
$\frac{1}{P(A)}+\frac{1}{P(B)}=\frac{P(A)+P(B)}{P(A)P(B)}=\frac{24}{5}$에서 $P(A)+P(B)=\frac{6}{5}$이므로
$P(A)P(B)=\frac{1}{4}$임을 알 수 있다.
두 사건 A와 B가 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$가 성립하므로
$P(A\cap B)=\frac{1}{4}$이다.

따라서, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{5}-\frac{1}{4}=\frac{19}{20}$

103.
모비율의 추정에서 신뢰도 95%의 신뢰구간은 다음과 같다.
$\left[\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}},\ \hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$
108명을 임의추출하였을 때의 신뢰구간이 $[0.25-c\leq p\leq0.25+c]$ 이므로 $\hat{p}=\frac{1}{4}$, $\hat{q}=\frac{3}{4}$임을 알 수 있다.

따라서 주어진 식에 $\hat{p}=\frac{1}{4}$, $\hat{q}=\frac{3}{4}$, $n=108$를 대입하면
$\left[0,25-1.96\times\frac{1}{24},\ 0.25+1.96\times\frac{1}{24}\right]$이므로 $c=1.96\times\frac{1}{24}$이다.

정답 및 해설

이번에는 동일한 신뢰도 95%에서 표본 n과 $\hat{p}=\frac{1}{2}$, $\hat{q}=\frac{1}{2}$를

신뢰구간에 대입하면 $\left[0.5-1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}\,,\ 0.5+1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}\right]$

이다. 따라서 앞서 구한 $c=1.96\times\frac{1}{24}=1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}$ 이므로

구하고자 하는 $n=144$이다.

104.
$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=1$이므로
$\mathrm{P}(0\le X\le 1)+\mathrm{P}(1\le X\le 2)+\mathrm{P}(2\le X\le 3)=k+k\times 2+k\times 3=1$

에서 $k=\frac{1}{6}$이다.

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{2}{3}$

105. $x+y$, $z+w$가 모두 홀수이다.
x, z가 모두 홀수, y, w가 모두 짝수인 경우
$(2x+1)+2y+(2z+1)+2w=10$이므로
$x+y+z+w=4$이다. 따라서 ${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4=35$이다.

이와 같은 경우는 총 4가지가 있다.
(x, z가 모두 홀수, y, w가 모두 짝수,
x, w가 모두 홀수, y, z가 모두 짝수,
y, z가 모두 홀수, x, w가 모두 짝수,
y, w가 모두 홀수, x, z가 모두 짝수)
그러므로 $35\times 4=140$이다.

106.
1) $a^2-b>0$인 경우 :
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)~(3, 6), (4, 1)~(4, 6), (5, 1)~(5, 6),
(6, 1)~(6, 6) : 총 27가지

2) $a^2-b=0$인 경우 : (1, 1), (2, 4) : 총 2가지

$\mathrm{E}(X)=\frac{27}{36}\times 2+\frac{2}{36}\times 1=\frac{3}{2}+\frac{1}{18}=\frac{14}{9}$이므로 $\mathrm{E}(9X)=14$이다.

107.
$\mathrm{E}(4X)=\mathrm{V}(4X)$는 $4\mathrm{E}(X)=16\mathrm{V}(X)$이다.
확률변수 X가 이항분포 $(n,\ p)$를 따르므로 $\mathrm{E}(X)=np$, $\mathrm{V}(X)=npq$
$(q=1-p)$로 나타낼 수 있다.
$4\mathrm{E}(X)=16\mathrm{V}(X)$에서 $\mathrm{E}(X)=4\mathrm{V}(X)$를 위의 n과 p로 나타내보자.
$np=4np(1-p)$ 이므로 $p=\frac{3}{4}$이다.

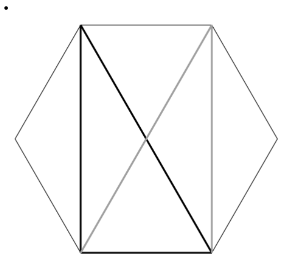
$\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{2^8}$이므로 $\mathrm{P}(X=0)={}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{2^8}$이다.
따라서 $n=4$이다.
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$를 이용하면 $\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$
이므로 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{3}{4}+9$이고 $\mathrm{E}(X^2)=\frac{39}{4}$이다.

108.
모자를 1개 이상 받으므로, ${}_3\mathrm{H}_4\times{}_3\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_4\times{}_5\mathrm{C}_3=150$이다.

109.
흰/흰/검 : $\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$ 흰/검/검 : $\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{5}{28}$
검/흰/검 : $\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{5}{28}$ 검/검/검 : $\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{28}$
따라서, 첫 번째로 꺼낸 공이 흰 공일 확률은 $\frac{3}{7}$이다.

110.
0.9544는 $\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)$이다. $\dfrac{124-120}{\frac{\sigma}{\sqrt{25}}}=2$에서 $\sigma=10$이다.
크기가 4인 표본을 임의추출할 때, 표본의 총합이 α 이상일 확률이
0.0228이므로, $\mathrm{P}(Z\ge 2)$일 때의 α의 값을 구해야 한다.
따라서, $\dfrac{\alpha-480}{\frac{\sigma}{\sqrt{4}}\times 4}=\dfrac{\alpha-480}{20}=2$이다. (480은 총합의 표본평균)
따라서, $\alpha=520$이다. 그러므로 $\alpha+\sigma=530$이다.

111.
정육각형의 6개의 꼭짓점 중 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_3$이다.
정육각형의 한 변을 정삼각형의 변으로 할 때 만들 수 있는
직각삼각형은 총 2개다.



따라서, 구하는 답은 $\frac{2\times 6}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$이다.

112.
주머니에서 1개의 공을 꺼냈을 때 흰 공이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$이다. 이
경우에는 1개의 공을 더 꺼내야 하고, 총 결과적으로 남아있는
주머니에 있는 흰색 공이 1개만 있어야 하므로, 두 번째로는 검은색
공이 나와야 한다. 따라서, $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$이다.

마찬가지로, 주머니에서 1개의 공을 꺼냈을 때 검은 공이 나올
확률은 $\frac{3}{5}$이다. 이 경우 2개의 공을 더 꺼내야 한다.
2개의 공을 꺼낼 때에는 흰색 공 1개, 검은색 공 1개가 나와야
주머니에 남아있는 흰 공이 1개가 된다.
따라서, $\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times 2=\frac{2}{5}$이다. 그러므로 $\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$이다.

113.
확률 분포표의 확률 합이 1이므로 $a=\frac{1}{4}$이다.

이를 통해 $\mathrm{E}(X)=\frac{7}{4}$이고, $\mathrm{V}(X)=\frac{11}{16}$임을 알 수 있다.
$n=44$인 표본을 임의 추출하였을 때의 확률이므로

$\mathrm{P}(\overline{X} \le \overline{x}) = 0.8413$이다. 이를 표준화하면 $\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{\overline{x}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0.8413$

이고 $n=44$, $\sigma = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$, $m = \dfrac{7}{4}$를 대입한 값이 1이 되어야한다.

따라서 $\overline{x} = \dfrac{15}{8}$이다.

114.

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{3}$이다.

$\{\mathrm{P}(A)\}^2 + \{\mathrm{P}(B)\}^2 = \{\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)\}^2 - 2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\}^2 &= \{\mathrm{P}(A)\}^2 + \{\mathrm{P}(B)\}^2 + 2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) \\ &= \frac{25}{36} + \frac{2}{3} = \frac{49}{36}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \dfrac{7}{6}$이고, $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{3}$ 이므로

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{7}{6} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$이다.

115.

1) 5번째 시행에서 동전이 앞면이 나오는 경우
5번째 동전이 앞면이 나오면 1~4차의 시행과 관계없이 반드시 24원 이상이 된다. 따라서 5번째 시행이 앞면이 나오는 확률 : $\dfrac{1}{2}$

2) 5번째 시행에서 동전이 앞면이 나오지 않는 경우
3,4차 시행의 동전이 모두 앞면이 나와야만 24원 이상이 된다.
따라서 5번째 시행은 뒷면이 나오고 3,4시행은 앞면이 나와야 하므로 확률은 $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

따라서 24원 이상을 받을 확률은 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$이다.

116.

화폐 A의 현재 가치를 c_A라 하면, 화폐 A의 일주일 후의 환율 X는 평균이 c_A, 표준편차가 $c_A k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}$인 정규분포를 따른다.
화폐 B의 현재 가치를 c_B라 하면, 시장불안정성 지표가 8배, 거래량이 36배이므로 화폐 B의 일주일 후의 환율 Y는 평균이 c_B, 표준편차가 $c_B(8k)^{\frac{2}{3}}(36p)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}c_B k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}$인 정규분포를 따른다.
확률변수 X와 Y를 표준화시켜 정리하면

$P\left(X \ge \dfrac{103}{100}c_A\right) = P(Z \ge 1) = P\left(Z \ge \dfrac{\left(\frac{103}{100}-1\right)c_A}{c_A k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}}\right)$이고,

$P\left(Y \ge c_B + \dfrac{a}{100}c_B\right) = P(Z \ge 2) = P\left(Z \ge \dfrac{\frac{a}{100}c_B}{\frac{2}{3}c_B k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}}\right)$이므로

$2\dfrac{\frac{3}{100}c_A}{c_A k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}} = \dfrac{\frac{a}{100}c_B}{\frac{2}{3}c_B k^{\frac{2}{3}} p^{-\frac{1}{2}}}$를 만족시킨다. 정리하면 $a=4$이다.

117.

(가) 짝수개, 홀수개만큼 뽑을 그릇을 2개씩 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$이다.
(나) 홀수에서 1을 빼면 짝수가 된다. 그러므로 홀수개만큼 뽑을 그릇 두 종류를 먼저 하나씩 뽑아둔다면, 네 종류의 그릇을 짝수개만큼 선택해 총 8개를 뽑는 경우의 수와 동일하다.
즉 네 종류의 그릇을 중복을 허락해 4개만큼 뽑는 경우의 수와 같다.
${}_4\mathrm{H}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = 35$
(다) $6 \times 35 = 210$이 구하는 경우의 수가 된다.

118.

실선 방향으로 움직이는 것은 1칸, 점선 방향으로 움직이는 것은 2칸 이동하는 것으로 해석할 수 있다. 그렇다면 6번 공이 돈 이후에 게임이 끝나기 위해서는 10칸을 이동해 A로 되돌아오는 것으로 해석할 수 있다.
그렇다면 점선 방향으로 이동하는 횟수를 x회, 실선 방향으로 이동하는 횟수를 y회로 놓으면 연립방정식 $x+y=6$, $x+2y=10$를 얻을 수 있다.
그러므로 실선 방향으로 2회, 점선 방향으로 4회 이동한다면, 오각형을 두 바퀴 돌아 A로 되돌아온다. 이렇게 움직이는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$가지이다.
다만, 중간에 A를 지나게 되면 게임이 끝나기 때문에 중간에 A를 지나 A로 되돌아오는 경우를 제외해야 한다. 실선 방향으로 1회, 점선 방향으로 2회 움직이면 한 바퀴 돌아 A로 되돌아오게 된다.
다시 실선 방향으로 1회, 점선 방향으로 2회 움직이면 두 바퀴 돌아 A로 되돌아오게 된다. 이렇게 움직이는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 9$가지이므로 이 경우를 제외하면 된다.
그러므로 구하는 확률은 $(15-9)\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{243}$이다.

119.

i) 세 공의 색이 모두 다른 경우(ABC)
첫 번째에는 아무 공이나, 두 번째에는 뽑았던 공의 색깔과 다른 색의 공을, 세 번째에는 첫 번째, 두 번째에 뽑았던 공의 색과 다른 색의 공을 뽑아야 한다. 따라서 $\dfrac{6}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{5}$이다.

ii) 첫 번째 공과 두 번째 공의 색이 다르고, 첫 번째 공과 세 번째 공의 색이 같은 경우(ABA)
첫 번째에는 아무 공이나, 두 번째에는 뽑았던 공의 색깔과 다른 색의 공을, 세 번째에는 첫 번째에 뽑았던 공의 색과 같은 색의 공을 뽑아야 한다.
$\dfrac{6}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{5}$

남은 3개의 공을 순서대로 하나씩 뽑을 때, 같은 색깔의 공이 연속해서 나오지 않을 확률을 구해보자.
처음에 i)의 방식으로 세 공을 모두 다르게(ABC) 뽑았으면, 남아있는 공도 서로 모두 다를 것(ABC)이므로, 아무렇게나 뽑아도 같은 색의 공이 연달아 나오지 않는다.
처음에 ii)의 방식으로 처음 뽑은 공과 마지막에 뽑은 공의 색만 같게(ABA) 뽑았으면, 한 색깔의 공이 2개, 다른 색깔의 공이 1개 남아 있을 것(BCC)이므로, 마찬가지로 처음 뽑은 공과 마지막에 뽑은

정답 및 해설

공의 색만 같게(CBC) 뽑아야 같은 색의 공이 연달아 나오지 않는다.
$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{3}$

그러므로 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{2}{5}\times1+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}$이다.

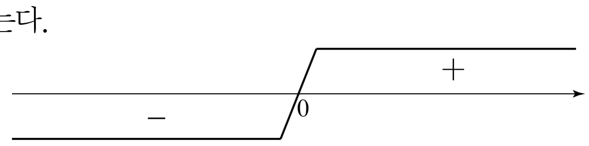
120.
1) 함수가 극값을 갖는 점의 개수를 구하기 위해서는 함수를 미분한 후 도함수의 부호가 변하는 점의 개수를 찾으면 된다. 우선 함수 $f(x)=x(x^a+x^b)$를 미분하기 위해서는, 일단 최고차항에 대해 알아야 한다.

$a>b$일 때 최고차항은 x^{a+1}
$a=b$일 때 최고차항은 $2x^{a+1}$
$a<b$일 때 최고차항은 x^{b+1}

이다. 따라서 가능한 순서쌍 (a, b)는 $a>b$일 때, $a=b$일 때, $a<b$일 때 이렇게 세 가지 경우로 나뉘게 된다. $a>b$일 때와 $a<b$일 때의 각각의 순서쌍은 $(1, 5)$와 $(5, 1)$처럼 서로 일대일로 대응하고, 함수 역시 같으므로 $a<b$일 때의 경우의 수는 따로 셀 필요 없이, $a>b$일 때의 경우의 수를 구한 뒤 2를 곱해주면 될 것이다.

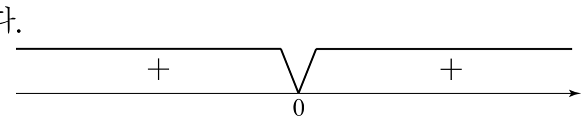
2) 일단 $a=b$일 때가 간단하므로 먼저 구해주자. 증감표를 그리기 위해 일단 먼저 $f'(x)$의 식을 구해보면, $a=b$일 때 $f(x)=2x^{a+1}$이므로, $f'(x)=2(a+1)x^a$이다.

a가 홀수일 때 $f(x)$의 증감표는 다음과 같으므로, $f(x)$는 1개의 극값을 갖는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(5, 5)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a가 짝수일 때 $f(x)$의 증감표는 다음과 같으므로, $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

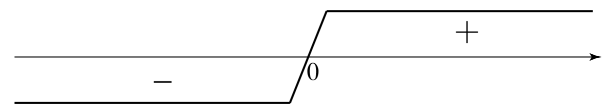


이를 만족시키는 순서쌍은 $(2, 2)$, $(4, 4)$, $(6, 6)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

3) $a>b$일 때 $f(x)$의 개형을 살펴보자. 증감표를 그리기 위해 일단 먼저 $f'(x)$의 식을 구해보면,
$f'(x)=(a+1)x^a+(b+1)x^b=(a+1)x^b\left\{x^{a-b}+\frac{b+1}{a+1}\right\}$이므로, b가 홀수일 때 $f'(x)$는 $x=0$ 근처에서 부호가 변하고, b가 짝수일 때 $f'(x)$는 $x=0$ 근처에서 부호가 변하지 않는다.

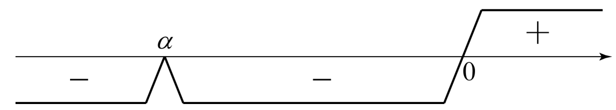
$a-b$가 짝수일 때 $x^{a-b}=-\frac{b+1}{a+1}$는 근을 갖지 않고, $a-b$가 홀수일 때 $x^{a-b}=-\frac{b+1}{a+1}$는 하나의 음수 근을 갖는다.

a가 홀수, b가 홀수일 때 $a-b$는 짝수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 1개의 극값을 갖는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 $(3, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 3)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a가 홀수, b가 짝수일 때 $a-b$는 홀수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 1개의 극값을 갖는다.

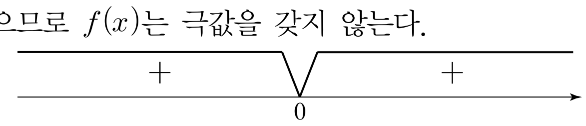


이를 만족시키는 순서쌍은 $(3, 2)$, $(5, 2)$, $(5, 4)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

a가 짝수, b가 홀수일 때 $a-b$는 홀수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 2개의 극값을 갖는다.

이를 만족시키는 순서쌍은
$(2, 1)$, $(4, 1)$, $(4, 3)$, $(6, 1)$, $(6, 3)$, $(6, 5)$이므로, 경우의 수는 6가지이다.

a가 짝수, b가 짝수일 때 $a-b$는 짝수이다. 이 때 $f(x)$의 증감표가 다음과 같으므로 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.



이를 만족시키는 순서쌍은 $(4, 2)$, $(6, 2)$, $(6, 4)$이므로, 경우의 수는 3가지이다.

4) $b>a$일 때의 경우의 수는 $a>b$일 때와 동일하다.

5) 그러므로 극값의 개수가 0개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 9가지이다.

극값의 개수가 1개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 15가지이다.

극값의 개수가 2개가 되도록 하는 순서쌍의 개수는 12가지이다.

이에 따라 확률분포표를 그리면

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	1

이므로 $\mathrm{E}(X)=\frac{13}{12}$이다.