2018학년도 대비 **All Clear Day - 2nd**

제 2 교시

수학 영역(가 형)

주의사항

30문항이 아닙니다! 어렵지도 않습니다!!

총 20문항, 60분입니다.

한문제가 틀리더라도 처음부터 다시 20문항을 풀어야 하는 교재입니다.

무의식을 단련하는 것은 쉽지 않습니다. 묵묵하게, 실수를 하지 않도록

틀리지 않게 계산하는 것이 이 교재의 목표입니다.

---

1. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 $x \le t$에서 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(6)}{f'(1)}$의 값을 구하시오

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=4$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\displaystyle\lim_{t\to 2-0}\frac{g(t)-g(2)}{t-2} \ne \lim_{t\to 2+0}\frac{g(t)-g(2)}{t-2}$

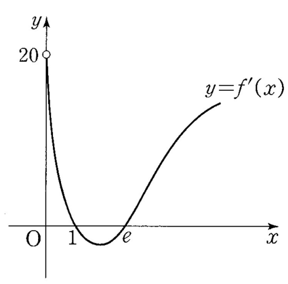
2. 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$을 만족시킨다. $f'(0)=1$이고 $g(x)=f(x)e^{-x}$이라 할 때, $f(1)+g'(2)$의 값은?

① $e-1$ ② $\dfrac{1}{e}+1$ ③ $\dfrac{1}{e}+2$
④ $e+1$ ⑤ $e+2$

3. 함수 $f(x)=e^x-(1+2x)(1+kx)$가 $x \ge 0$에서 $f(x) \ge 0$이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

4. 정의역이 $\{x|x>0\}$인 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같고 다음 조건을 만족시킨다.



(가) $\displaystyle\lim_{x\to +0} f(x)=2$, $f(e)=0$
(나) $x>e$에서 $f'(x)>0$이다.

x에 대한 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합이 13일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=m$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오.

5. 정의역이 $\{x|0<x<2\}$인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=\dfrac{6}{x(2-x)}+1$

(나) $f(1)=1$

곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선의 y절편은?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

6. 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(a,\ a)$와 곡선 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$에 대하여 함수 $f(t)$를 $f(t)=\overline{\mathrm{AP}}^2$이라 하자. 집합 $\{\alpha|f(\alpha)$는 함수 $f(x)$의 극값이다.$\}$의 원소가 $a_1,\ a_2,\ a_3$이고 $a_1<a_2<a_3$일 때, $f(a_1)+f(a_2)=k$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구하시오. (단, $a>2$인 상수이다.)

7. 정의역이 $\{x|x\neq-1$인 실수$\}$인 함수

$$f(x)=\frac{1}{4}x-\frac{3x-1}{(x+1)^2}$$

이 있다. $k\neq-1,\ k\neq1$인 정수 k에 대하여 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 감소 상태에 있을 때, $f(k)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8. 매개변수로 나타내어진 함수 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 가 나타내는 곡선 위의 점에서의 접선 l의 기울기가 $-\sqrt{3}$일 때, 접선 l과 x축, y축이 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $10\overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오.

(단, $0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}$)

9. 곡선 $y^2-xy+x-3=0$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선 l과 평행한 직선 l'이 이 곡선 위의 점 $(a,\ b)$에서 접할 때, $a-b$의 값은? (단, $a\neq1$)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10. 함수 $f(x)=e^{ax}\cos bx$가 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)-6f'(x)+25f(x)=0$이 성립하도록 실수 $a,\ b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? (단, $b>0$)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

11. 함수 $f(x)=(ax+b)\sin x$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(-\pi)=0$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f''(x)=3\cos x$이다.

두 상수 $a,\ b$에 대하여 $\tan ab$의 값은?

① $-\sqrt{3}$ ② -1 ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

12. 점 $(1,\ e^2+2)$를 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2e^{2x}+2$이다. 자연수 n에 대하여 $(n,\ f(n))$에서의 접선이 y축과 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10ne^{2n}}$의 값은?

① $-\dfrac{1}{5}$ ② $-\dfrac{2}{5}$ ③ $-\dfrac{3}{5}$
④ $-\dfrac{4}{5}$ ⑤ -1

13. 미분가능한 함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$가 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가

$$F(x)=xf(x)+x\sin x+\cos x$$

를 만족시킨다. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$일 때, 닫힌 구간 $[-\pi,\ 3\pi]$에서 방정식 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

14. $\int_{-1}^{1}|2x|e^{2x}dx$의 값은?

① $2+e^2-3e^{-2}$ ② $\frac{1}{2}(2+e^2-3e^{-2})$ ③ $2(2+e^2-3e^{-2})$
④ $\frac{1}{2}(e^2+3e^{-2})$ ⑤ e^2+3e^{-2}

15. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.
(나) $\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{1}{3}$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프를 함수 $y=g(x)$라 할 때, $\int_{3}^{10}g(x)dx$의 값은?

① -5 ② $-\frac{14}{3}$ ③ $-\frac{13}{3}$
④ -4 ⑤ $-\frac{11}{3}$

16. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

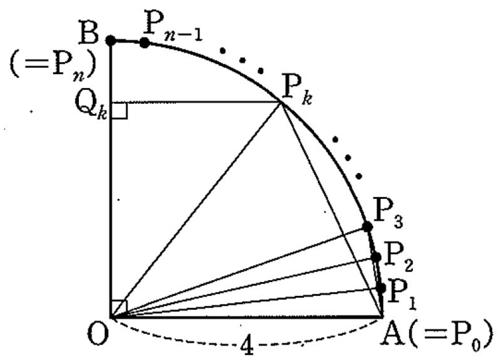
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)+f(x)=0$이다.
(나) $\int_{0}^{1}f(x)dx=1,\ \int_{0}^{1}xf(x)dx=\frac{2}{3}$

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-xf(x)+x^2f(x)\}dx=a,$$
$$\int_{-2}^{1}f(x)dx-\int_{-2}^{-1}f(x)dx=b$$

일 때, 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$
④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB를 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 P_0, P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n이라 하자.



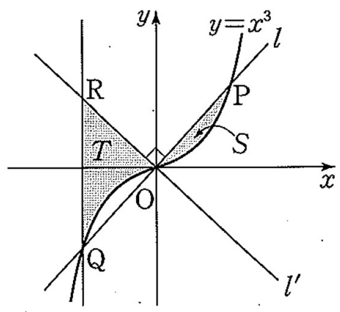
점 $P_k(k=1, 2, 3, \cdots, n-1)$에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 Q_k라 하자. 사다리꼴 OAP_kQ_k의 넓이를 S_k라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은? (단, S_n은 삼각형 OAP_n의 넓이이다.)

① $\frac{8}{\pi}$ ② $\frac{12}{\pi}$ ③ $\frac{16}{\pi}$
④ $\frac{20}{\pi}$ ⑤ $\frac{24}{\pi}$

18. 좌표평면에서 두 곡선 $y=\sqrt{x+4}$, $y=\sqrt{4-x}$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 8
④ $\frac{28}{3}$ ⑤ $\frac{32}{3}$

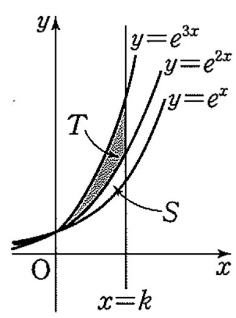
19. 그림과 같이 좌표평면의 제1사분면에서 곡선 $y=x^3$ 위에 점 P가 있다. 점 P와 원점 O를 지나는 직선 l이 곡선 $y=x^3$과 제3사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. 직선 l과 수직이고 원점을 지나는 직선을 l'이라 할 때, 점 Q를 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 l'과 만나는 점을 R라 하자. 곡선 $y=x^3$과 선분 OP로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하고, 곡선 $y=x^3$과 두 선분 OR, QR로 둘러싸인 도형의 넓이를 T라 할 때, $T-S$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

20. 그림과 같이 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{2x}$과 직선 $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하고, 두 곡선 $y=e^{2x}$, $y=e^{3x}$과 직선 $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T라 하자. $S:T=1:3$일 때, $S+T$의 값은?

(단, $k>0$)



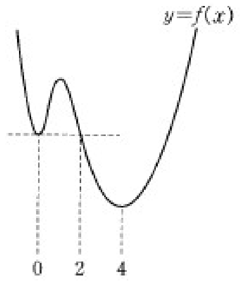
① 14 ② 15
③ 16 ④ 17 ⑤ 18

정답 및 해설

1) 답 76

풀이

조건 (가)에서 사차함수 $f(x)$가 두 개의 극솟값을 갖고 조건 (나)에서 함수 $g(t)$가 $t=2$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(x)-f(0)=ax^2(x-2)(x-\alpha)\quad(\alpha>0)$

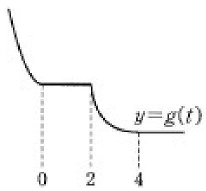
$f'(x)=2ax(x-2)(x-\alpha)+ax^2(x-\alpha)+ax^2(x-2)$

$f'(4)=0$이므로

$f'(4)=16a(4-\alpha)+16a(4-\alpha)+32a$

$\quad=160a-32\alpha a=0$

$\therefore\ \alpha=5\quad(\because\ a\neq0)$



$f'(x)=2ax(x-2)(x-5)+ax^2(x-5)+ax^2(x-2)$

$f'(1)=2a\times(-1)\times(-4)+a\times(-4)+a\times(-1)=3a$

$f'(6)=12\times a\times4+36\times a+36\times a\times4=228a$

$\therefore\ \dfrac{f'(6)}{f'(1)}=\dfrac{228a}{3a}=76$

2) 답 ④

풀이

$g(x)=f(x)e^{-x}$에서

$g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$

한편, $f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$에

$x=y=0$을 대입하면 $f(0)=2f(0)$이므로 $f(0)=0$

$f'(x)=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\quad=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)e^h+f(h)e^x-f(x)}{h}$

$\quad=f(x)\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}+e^x\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}$

에서

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}=1,\ \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=1$

이므로

$f'(x)=f(x)+e^x$

따라서 $g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}=e^x\cdot e^{-x}=1$이므로

$g(x)=x+C$ (C는 적분상수)임을 알 수 있다.

그런데 $g(0)=f(0)e^0=0$이므로 $g(x)=x,\ f(x)=g(x)e^x=xe^x$

이다.

$\therefore\ f(1)+g'(2)=e+1$

3) 답 ②

풀이

$f(x)=e^x-(1+2x)(1+kx)$에서

$f(0)=1-1=0$

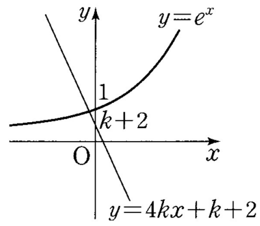
또한,

$f'(x)=e^x-2(1+kx)-k(1+2x)$

$\quad=e^x-(4kx+k+2)$

이므로

$f'(0)=1-k-2=-1-k$



이때 $f(0)=0$이므로 $f'(0)<0$이면 $x\ge0$에서 $f(x)\ge0$에 모순이다.

따라서 $f'(0)\ge0$이어야 한다.

즉, $-1-k\ge0$에서 $k\le-1$

그리고 $k+2\le1$ 에서

$e^x\ge4kx+k+2$이므로

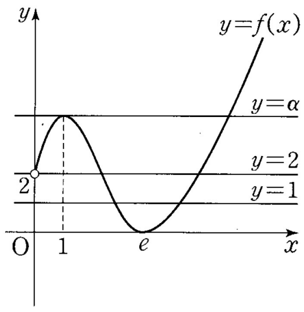
$f'(x)=e^x-(4kx+k+2)\ge2$

따라서 k의 최댓값은 -1이다.

4) 답 42

풀이

주어진 조건에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 극댓값을 α라 하면 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 그림에서

$k=1,\ k=2,\ k=\alpha$

이다.

$1+2+\alpha=13$

$\therefore\ \alpha=10$

따라서 방정식 $f(x)=m$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 m은 3, 4, 5, $\cdots$, 9이므로 그 합은

$\dfrac{7(3+9)}{2}=42$

5) 답 ③

풀이

$f''(x)=\dfrac{-6(2-2x)}{x^2(2-x)^2}=\dfrac{12(x-1)}{x^2(2-x)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=1$이고 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1,\ f(1))$, 즉 $(1,\ 1)$이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=f'(1)(x-1)$

$y-1=7(x-1)$, $y=7x-6$

즉, y절편은 -6이다.

6) 답 5

풀이

$$f(t)=\overline{\mathrm{AP}}^2$$
$$=(t-a)^2+\left(\frac{1}{t}-a\right)^2$$
$$=t^2-2at+2a^2-\frac{2a}{t}+\frac{1}{t^2}$$
$$f'(t)=2t-2a+\frac{2a}{t^2}-\frac{2}{t^3}$$
$$=\frac{2}{t^3}(t^4-at^3+at-1)$$
$$=\frac{2}{t^3}(t-1)(t+1)(t^2-at+1)$$

이때 $t>0$이므로 집합 $\{\alpha | f(\alpha)$는 함수 $f(x)$의 극값이다.$\}$의 원소가 서로 다른 세 개가 존재하려면 t에 대한 이차방정식

$t^2-at+1=0$ …… ㉠

이 0보다 크고 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

그런데 $a>2$이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4=a^2-4>0$

㉠의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=1$

따라서 $\alpha<1<\beta$이므로 $a_1=\alpha$, $a_2=1$, $a_3=\beta$

$$\therefore\ f(a_1)+f(a_2)=f(\alpha)+f(1)$$
$$=\left\{(\alpha-a)^2+\left(\frac{1}{\alpha}-a\right)^2\right\}+\{(1-a)^2+(1-a)^2\}$$
$$=\{(\alpha-a)^2+(\beta-a)^2\}+2(1-a)^2\ (\because\ \alpha\beta=1)$$
$$=\{(\alpha^2+\beta^2)-2a(\alpha+\beta)+2a^2\}+2(1-a)^2$$
$$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2a(\alpha+\beta)+2a^2\}+2(1-a)^2$$
$$=(a^2-2)+2(1-a)^2\ (\because\ \alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=1)$$
$$=3a^2-4a$$
$$=3\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$$

즉, $k=3\left(a-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3}$이고, $a>2$이므로 $k>4$

즉, 자연수 k의 최솟값은 5이다.

7) 답 ④

풀이

$f(x)=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3x-1}{(x+1)^2}$에서

$$f'(x)=\frac{1}{4}+\frac{3x-5}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{(x+1)^3+12x-20}{4(x+1)^3}$$
$$=\frac{x^3+3x^2+15x-19}{4(x+1)^3}$$
$$=\frac{(x-1)(x^2+4x+19)}{4(x+1)^3}$$

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 감소 상태에 있으므로

$f'(k)\le 0$이어야 한다.

$$\frac{(k-1)(k^2+4k+19)}{4(k+1)^3}\le 0$$

$(k-1)(k+1)^3(k^2+4k+19)\le 0$

$(k-1)(k+1)\le 0$ $(\because\ (k+1)^2>0,\ k^2+4k+19>0)$

$\therefore\ -1<k<1$ $(\because\ k\ne -1,\ k\ne 1)$

따라서 정수 k는 0이므로

$f(0)=1$

8) 답 10

풀이

$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 를 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$$
$$\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$$
$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\tan t\ (\text{단, } \cos^2 t\sin t\ne 0)$$

접선 l의 기울기가 $-\sqrt{3}$이므로 $-\tan t=-\sqrt{3}$에서

$\tan t=\sqrt{3}$이고, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$이므로 $t=\dfrac{\pi}{3}$이다.

접선 l의 방정식은

$$y-\sin^3\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}\left(x-\cos^3\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\therefore\ y=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$$10\overline{\mathrm{AB}}=10\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$=10\times 1=10$$

9) 답 ③

풀이

$y^2-xy+x-3=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}-y-x\dfrac{dy}{dx}+1=0$

$(2y-x)\dfrac{dy}{dx}=y-1$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-1}{2y-x}$ (단, $2y\neq x$)

따라서 곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선 l의 기울기는

$\dfrac{2-1}{2\times 2-1}=\dfrac{1}{3}$

이므로 이 접선과 평행한 직선 l'의 기울기는 $\dfrac{1}{3}$이다

즉, $\dfrac{b-1}{2b-a}=\dfrac{1}{3}$에서

$3(b-1)=2b-a$

$\therefore b=-a+3$ …… ㉠

또한, 점 $(a,\ b)$는 곡선 위의 점이므로

$b^2-ab+a-3=0$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(-a+3)^2-a(-a+3)+a-3=0$

$a^2-4a+3=0,\ (a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a\neq 1)$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$b=0$

$\therefore a-b=3-0=3$

10) 답 ③

풀이

$f(x)=e^{ax}\cos bx$에서

$f'(x)=ae^{ax}\cos bx+e^{ax}(-b\sin bx)$

$\quad=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)$

$f''(x)=ae^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)+e^{ax}(-ab\sin bx-b^2\cos bx)$

$\quad=e^{ax}\{(a^2-b^2)\cos bx-2ab\sin bx\}$

$f''(x)-6f'(x)+25f(x)=0$에서

$e^{ax}\{(a^2-b^2)\cos bx-2ab\sin bx\}$
$\quad-6e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)+25e^{ax}\cos bx=0$

$(a^2-b^2-6a+25)\cos bx-2b(a-3)\sin bx=0$ ……㉠

이때 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$a^2-b^2-6a+25=0$이고 $-2b(a-3)=0$이다.

$-2b(a-3)=0$에서 $a=3\ (\because b>0)$

$a^2-b^2-6a+25=0$에 $a=3$을 대입하면

$16-b^2=0 \qquad \therefore b=4\ (\because b>0)$

$\therefore a+b=3+4=7$

11) 답 ④

풀이

$f(x)=(ax+b)\sin x$에서

$f'(x)=a\sin x+(ax+b)\cos x$이므로

$f'(-\pi)=\pi a-b=0$ ……㉠

또한, $f''(x)=2a\cos x-(ax+b)\sin x$이므로

$f(x)+f''(x)=3\cos x$에서

$2a\cos x=3\cos x$

$(2a-3)\cos x=0$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-3=0 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{2}$

$a=\dfrac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{3}{2}\pi-b=0 \qquad \therefore b=\dfrac{3}{2}\pi$

$\therefore ab=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2}\pi=\dfrac{9}{4}\pi$

$\therefore \tan ab=\tan\dfrac{9}{4}\pi=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

12) 답 ①

풀이

$f'(n)=2e^{2n}+2$이므로

$f(n)=e^{2n}+2n+C$(단, C는 적분상수)

$f(1)=e^2+2+C=e^2+2$에서 $C=0$이므로

$f(n)=e^{2n}+2n$

따라서 $(n,\ f(n))$에서의 접선의 방정식은

$y-(e^{2n}+2n)=(2e^{2n}+2)(x-n)$

즉, $y=(2e^{2n}+2)x+(e^{2n}-2ne^{2n})$이므로

$a_n=e^{2n}-2ne^{2n}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{10ne^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2ne^{2n}+e^{2n}}{10ne^{2n}}$

$\quad=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{10}+\dfrac{1}{10n}\right)=-\dfrac{1}{5}$

13) 답 ④

풀이

$f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+\sin x+x\cos x-\sin x$

$xf'(x)+x\cos x=0$

$f'(x)=-\cos x$

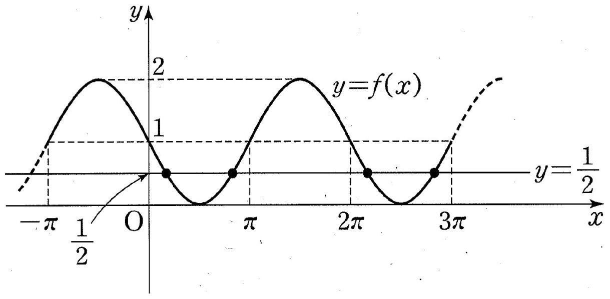
$\therefore\ f(x)=\int(-\cos x)dx$

$\quad=-\sin x+C$(단, C는 적분상수)

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1+C=0$ 이므로 $C=1$

$\therefore\ f(x)=-\sin x+1$

$-\pi\le x\le 3\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ 이므로 $-\pi \le x \le 3\pi$ 에서 $f(x)=\frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 의 서로 다른 교점의 개수이므로 4이다.

따라서 구하는 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

14) 답 ②

풀이

$|2x|=\begin{cases} -2x & (x<0) \\ 2x & (x \ge 0) \end{cases}$ 이므로

$$\int_{-1}^{1}|2x|e^{2x}dx=\int_{-1}^{0}(-2xe^{2x})dx+\int_{0}^{1}2xe^{2x}dx$$

$$=\int_{0}^{1}2xe^{2x}dx-\int_{-1}^{0}2xe^{2x}dx \cdots\cdots ㉠$$

$u'=e^{2x}$, $v=2x$ 로 놓으면 $u=\frac{1}{2}e^{2x}$, $v'=2$ 이므로

$$\int_{0}^{1}2xe^{2x}dx=\Big[xe^{2x}\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}e^{2x}dx=(e^2-0)-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{0}^{1}$$

$$=e^2-\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{0}2xe^{2x}dx=\Big[xe^{2x}\Big]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{2x}dx=(0+e^{-2})-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{0}$$

$$=e^{-2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}\right)=\frac{3}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}$$

따라서 ㉠에서

$$\int_{-1}^{1}|2x|e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}e^{-2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(2+e^2-3e^{-2})$$

15) 답 ②

풀이

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에 의하여 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{2}{3}$

조건 (다)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{5}f(x)dx$$

$$=\int_{5}^{7}f(x)dx=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \int_{1}^{7}f(x)dx=3\int_{-1}^{1}f(x)dx=3\times\frac{2}{3}=2$$

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식을 구하면

$y+1=f(x-3)$, $y=f(x-3)-1$이므로

$g(x)=f(x-3)-1$

$$\therefore \int_{3}^{10}g(x)dx=\int_{3}^{10}f(x-3)dx-\int_{3}^{10}dx \cdots\cdots ㉠$$

$x-3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고

$x=3$일 때 $t=0$, $x=10$일 때 $t=7$이므로

$$\int_{3}^{10}f(x-3)dx=\int_{0}^{7}f(t)dt=\int_{0}^{7}f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{7}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$$

㉠에서

$$\int_{3}^{10}g(x)dx=\frac{7}{3}-\Big[x\Big]_{3}^{10}=\frac{7}{3}-(10-3)=-\frac{14}{3}$$

16) 답 ③

풀이

$f(-x)+f(x)=0$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$$

$g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{1}xf(x)dx=2\int_{0}^{1}xf(x)dx$$

$h(x)=x^2f(x)$라 하면

$h(-x)=(-x)^2f(-x)=-x^2f(x)=-h(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1}h(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=0$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}\{f(x)-xf(x)+x^2f(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{-1}^{1}xf(x)dx+\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx$$

$$=0-2\int_{0}^{1}xf(x)dx+0$$

$$=-2\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

$$\int_{-2}^{1}f(x)dx-\int_{-2}^{-1}f(x)dx=-\int_{1}^{-2}f(x)dx-\int_{-2}^{-1}f(x)dx$$

$$=-\left\{\int_{1}^{-2}f(x)dx+\int_{-2}^{-1}f(x)dx\right\}$$

$$=-\int_{1}^{-1}f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$$

따라서 $a=-\frac{4}{3}$, $b=0$이므로 $a+b=-\frac{4}{3}$

17) 답 ⑤

풀이

$\angle \mathrm{P}_k\mathrm{OA}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{n}\times k=\dfrac{\pi}{2n}k$ 이므로

$\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k}=4\cos\dfrac{\pi}{2n}k$

$\overline{\mathrm{OQ}_k}=4\sin\dfrac{\pi}{2n}k$

$S_k=\dfrac{1}{2}\left(4+4\cos\dfrac{\pi}{2n}k\right)\cdot 4\sin\dfrac{\pi}{2n}k$

$\quad=8\left(1+\cos\dfrac{\pi}{2n}k\right)\cdot\sin\dfrac{\pi}{2n}k$ (단, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$)

$S_n=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$ 이므로

$S_k=8\left(1+\cos\dfrac{\pi}{2n}k\right)\cdot\sin\dfrac{\pi}{2n}k$ (단, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}8\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}k\right)\sin\frac{\pi}{2n}k$$

$$=8\int_0^1\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$=8\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{2}\sin\pi x\right)dx$$

$$=8\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{2\pi}\cos\pi x\right]_0^1$$

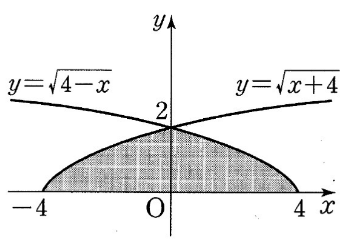
$$=8\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\right)=\frac{24}{\pi}$$

18) 답 ⑤

풀이

두 곡선 $y=\sqrt{x+4}$, $y=\sqrt{4-x}$ 의 교점의 x좌표는 $\sqrt{x+4}=\sqrt{4-x}$ 에서 $x+4=4-x$

$\therefore\ x=0$



두 곡선 $y=\sqrt{x+4}$, $y=\sqrt{4-x}$ 는 y축에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=\sqrt{x+4}$, $y=\sqrt{4-x}$ 와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 S는

$$S=2\int_{-4}^{0}\sqrt{x+4}\,dx=2\left[\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}\right]_{-4}^{0}$$

$$=2\left(\frac{2}{3}\times4\times2\right)=\frac{32}{3}$$

19) 답 ①

풀이

점 P의 좌표를 $(a,\ a^3)$ $(a>0)$이라 하자.

직선 l의 방정식은 $y=a^2x$

직선 l'의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{a^2}x$

또한 점 Q의 좌표는 $(-a,\ -a^3)$이고,

점 R의 좌표는 $\left(-a,\ \dfrac{1}{a}\right)$이다.

$$S=\int_0^a(a^2x-x^3)\,dx=\left[\frac{a^2}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^a=\frac{a^4}{4}$$

$$T=\int_{-a}^{0}\left(-\frac{1}{a^2}x-x^3\right)dx=\left[-\frac{1}{2a^2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{-a}^{0}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{a^4}{4}$$

$$\therefore\ T-S=\left(\frac{1}{2}+\frac{a^4}{4}\right)-\frac{a^4}{4}=\frac{1}{2}$$

다른 풀이

$$T-S=\triangle\mathrm{ORQ}-2\int_0^a(a^2x-x^3)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}a\left(a^3+\frac{1}{a}\right)-2\left[\frac{a^2}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{4}a^4=\frac{1}{2}$$

20) 답 ⑤

풀이

$S=\displaystyle\int_0^k(e^{2x}-e^x)\,dx,\ \ T=\int_0^k(e^{3x}-e^{2x})\,dx$

$S:T=1:3$에서 $T=3S$

즉, $T-3S=0$이므로

$$T-3S=\int_0^k(e^{3x}-e^{2x})\,dx-3\int_0^k(e^{2x}-e^x)\,dx$$

$$=\int_0^k(e^{3x}-4e^{2x}+3e^x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}e^{3x}-2e^{2x}+3e^x\right]_0^k$$

$$=\frac{1}{3}e^{3k}-2e^{2k}+3e^k-\frac{1}{3}+2-3$$

$$=\frac{1}{3}e^{3k}-2e^{2k}+3e^k-\frac{4}{3}$$

$\dfrac{1}{3}e^{3k}-2e^{2k}+3e^k-\dfrac{4}{3}=0$에서 $e^k=t$로 놓으면

$k>0$에서 $t>1$

$\dfrac{1}{3}t^3-2t^2+3t-\dfrac{4}{3}=0$

1	1	-6	9	-4
		1	-5	4
	1	-5	4	0

$t^3-6t^2+9t-4=0$

$(t-1)(t^2-5t+4)=0$

$(t-1)^2(t-4)=0\quad\therefore\ t=4\ (\because\ t>1)$

따라서 $e^k=4$에서 $k=\ln4$

$$\therefore\ S+T=\int_0^{\ln4}(e^{3x}-e^x)\,dx=\left[\frac{1}{3}e^{3x}-e^x\right]_0^{\ln4}$$

$$=\left(\frac{64}{3}-4\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=18$$