



# 신재민의 수학공간

## 수학 영역

1

중위권을 위한 문제풀이법  
- 4점문제를 풀어내자 -

안녕하세요 신SUN입니다.

이번 글은  
중위권 학생들을 위한 매우 실전적인 문제를 푸는 방법에 대해서  
얘기해드리려고 왔어요.

상위권 학생들은 가볍게 읽고 '맞아 내가 잘하고 있네'  
확인만 하시면 되고,  
중위권 분들은 눈 단디 뜨고 보세요.

**리얼 개꿀일테니까.**

'드디어 개념끝났다!' 하고 문제풀이에 박차를 가하는 여러분들  
'6평 끝났다! 근데, 문제를 많이 안 풀어서 점수가 안 나온 것 같아.' 하며  
바로 문제 문제! 하시는 분들

어때요?  
풀어보니, 잘 풀리던가요?

대부분의 학생들이 이러시겠죠.

'개념은 알겠는데, 왜 대체 문제를 풀려고 하면 잘 안되는거야?  
'3점문제는 이제 어느정도 되는데. 4점문제 왜케 어려워'

왜 이럴까요?

여러분, 생각해 보세요.

물론 틀린 문제의 답지를 보거나, 인강 들으면서  
그 문제의 풀이방법을 아는 것도 중요한데

**본인이 스스로 문제를 풀 수 있게 되어 하는거 아니에요?**

기출말고,  
처음보는 문제를 풀어내야 하는 거 아니냐구요.

그럼 문제를 푸는 순간에, 대충 의식의 흐름속에서 푸는 게 아니라  
어떻게 푸는지 그 방법을 알아야 할 거 아닌가요?

여러분들 영어, 국어 지문 읽을 때 그냥 훑 읽고 생각없이 문제 푸나요?

본인만의 방법으로 열심히 읽고 생각하고 하잖아요.

마찬가지야

수학은 진짜 실시간으로 **생각하면서 풀어야** 하는데

여러분들이, 이 걸 안해.

그래서 풀어서 틀리고 답지 보고 알아도,  
시간이 흐른 뒤에 다시 풀어보면 또 못 풀어.

왜?

**이 전에 내가 어떤 생각을 못해서 틀렸는지를 학습하지 않고**  
**그냥 생각을 안하고 답지의 풀이법을 기억하려고만 하니까.**

안된다구요

본인이 개념공부를 열심히 했다하더라도

**실제로 문제 풀 때 배운 개념을 어떻게 활용해서 문제를 보고,**  
**내가 어떤 행동을 취하면서 문제를 풀지 생각을 안하고 푸니까**

**문제가 잘 안 풀리는 거예요.**

부족한 부분을 메꾸면서 하지 않으니까요  
밑 빠진 독에 물이 조금씩 채워지긴 하는데,  
노력한 만큼 빠르게 채워지질 않는거죠

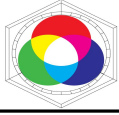
여러분은 제대로 문제 풀고 계신가요?

**생각** 하면서 풀고 계시냐는 말이에요.

'생각이야 당연히 하죠, 근데 생각해봤는데 모르니까 문제죠'  
'흠... 좀 기계적으로 풀려고만 하는 것 같긴 한데요..'

본인이 어떻게 문제를 풀고있는지,  
**결국 문제를 어떻게 풀어야 하는지, 풀면서 무슨 생각을 해야 하는건지**

이 글에서 배우고 가보자구요.



### 여러분이 해야 할 것

수학 공부하는 시간 중에 일부를 내서, 교과서 한 번씩만 보면서 내용정리

+ 문제 풀면서, 내가 해야 할 행동방식 생각 및 정리

교과서를 보면서 내용 정리 하는 건 무엇을 얘기인건가?

교과서의 학습목표를 꼭 읽으면서, 이 단원을 왜 배우는지 꼭 생각해보고

용어 및 내용 확실히 이해(암기) 하기.

기본적인 겁니다. 예를 들어볼까요?

1. 급수는 부분합의 극한값으로 생각한다.  
(교과서에 있는 모든 급수에 관한 정리는 다 부분합의 극한으로 증명하고 있다.)

2. 함수의 증가 감소를  $f'$ 의 관점으로 본다면  $f'$ 의 부호로 판별한다.  
그리고  $f$ 함수에서 극값이 존재하려면,  $f$ 가 미분가능 하다고 할 때  $f' = 0$ 이 되는 점에서 좌,우의  $f'$ 의 부호가 바뀌어야 한다. 꼭 체크

3.  $f$ 가 우함수라면  $f(x) = f(-x)$ 이고,  $y$ 축 대칭이고,  $f'$ 은 기함수이고, 우/기 함수를 판별하려면  $x \rightarrow -x$  대입해서!

등등..

자세하게 알고계셔야 한다는 거예요.

그리고 꼭 '교과서에 수록되어있는 정의' 한 번씩 해보고 따져봐야 해요.

대체 무슨 과정을 거쳐 증명이 되는지.

단순암기 NO

예를 들어볼까요?

**대충공부:**

함수의 극한 단원에서 극한 꼴이  $\frac{\infty}{\infty}$  일 때, 최고차항의 계수의 비

이렇게 알고 계신 분들에게  
저거 왜 그런거야? 하면 얘기를 못해요

NONO 그러면 안됩니다.  
원리를 알고 가시란 얘기에요.

**모범답안:**

함수의 극한을 계산하기 위해선, 극한 기본성질을 이용해서 구해야 하는데 이 기본성질은 함수가 수렴하는 경우에서만 가능하죠.

그러므로  $\frac{\infty}{\infty}$  은 분모, 분자 모두 발산하는 형태이므로 쓸 수가 없어요.

그럼 어떻게 해야 수렴하는 형태로 바꿀 수 있을까?

아, 최고차항으로 분모 분자를 똑같이 나눠보자! 그럼 수렴할 수 있겠다!

따로 시간내서, 개념을 볼 때  
이런 생각들! 해야 해요.

그냥 주먹구구식 공부 + 많은 문제를 풀기 는 분명 한계가 와요.

Killer 문제를 제대로 풀 수 없단 말입니다.

이렇게 생각하는 연습이 되어있어야, 궁극적으로

**실제로 문제를 풀 때에 문제에 조건을 보고**

**'무슨 생각을 해야 하는지, 그 과정에서 어떤 추론을 하여 내가 알고 있는 개념과 접목시켜 뭘 써먹을 것인지!' 가 된단 말입니다.**

참고로,

제가 기출문제 푸는 법에서 알려드린 STEP을 밟아가며  
문제를 본격적으로 풀기 전에 어떤 개념을 써야할까 고민하고 들어가시면,

더 빠르게 사고하는 법을 익힐 수 있습니다.

**그러면 문제를 풀면서는 어떻게 해야하나?**

**마치 문제와 얘기하듯 풀면서, 조건들을 보고 교과서를 통해 공부한 내용에 맞춰 해석하고, 하나씩 따지고 생각하면서 어떻게 개념을 활용할지 추론하면서 푼다.**

문제에 주어진 조건을, 스스로 생각하면서

'엇 이 조건은 이렇게 정의되는데, 그럼 이 생각을 할 수 있겠지?

그렇다면 이 식을 결과적으로 써야겠구나!

라고 말이에요.

예를들어,

**'극값이 존재하지 않다' 라는 조건:**

'엇 극값 존재하는 게 함수의 증감이 바뀌고, 그 애긴 도함수의 부호가 바뀌어야 하는것이니까, 반대로 극값이 존재하지 않으려면 증감이 바뀌지 않고 도함수의 부호도 바뀌지 않는거구나! 그 말은 증가함수 or 감소함수 이구나  
다른 조건을 보니 증가함수 이구나! 그럼 난 결국  $f' \geq 0$  이란 식을 써서 문제를 풀면되겠구나!

라고 생각할 수 있어야 됩니다.

안해보셨다구요? 어려워 보인다구요?

어렵죠. 해본적이 없으니.

이 생각하는 연습을 충분히 하고 익숙해져야,  
나중에 낯선 Killer 문제들을 풀 때도 이렇게 생각할 수 있게 되는데..

해야하지 않겠어요?

자, 말로만 얘기하니 좀 두루뭉술해 보이죠?

본격적으로 문제를 보면서 얘기해보죠.



Q. 이제 본격적이야?

A. 그래도 배워가는게 있을텐데 끝까지 보시죠~

제가 문제를 그냥 풀지않고, 조건을 해석하고 무슨 개념을 써먹을지 추론하는 과정을 시뮬레이션으로 보여드릴테니 보면서 '응 알아' 이러지 마시고 직접 해보시길 바랍니다.

28. 다항함수  $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 - 2x \int_0^1 f(t)dt$$

일 때,  $f(0) = a$ 라 하자.  $60a$ 의 값을 구하시오. [4점]

시뮬레이션

음.. 적분-미분 관계를 묻는 문제가 나왔네. 자주 보긴했어 두가지를 알아야하지. 1) 양변 미분 2)  $x = 0$  대입

미분을 해보니  $f(x) = 3x^2 - 4x - 2 \int_0^1 f(t)dt$ 가 되는구나.

$\int_0^1 f(t)dt$ 가 문제인데,

이 건 결국 정적분 값인 상수로 나오기 때문에  $c$ 라고 봐도 돼!

$\therefore f(x) = 3x^2 - 4x - 2c$  이고,  $f(x)$  를  $\int_0^1 f(t)dt = c$  에 대입하면 끝!

이 문제는 쉬웠기 때문에 다 풀 수 있었겠지만,

생각! 추론! 에는 항상 근거가 있게!

다음 문제 보조. 풀고 보면 효과가 2배!

21. 삼차함수  $f(x) = x^3 - 3x + a$ 에 대하여 함수

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수  $a$ 의 최솟값은?

[4점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

시뮬레이션

음.. 삼차함수  $f(x)$ 가 주어졌고 또 미분-적분 관계 문제이네 1) 양변 미분, 2)  $x = 0$  대입해야지

$F'(x) = f(x)$  이고,  $F(0) = 0$  이야.

오직 하나의 극값을 가지라고 했고, 양수  $a$ 의 최솟값이래.

그 말은  $a$ 가 될 수 있는 수가 많나본데?

그 중 가장 작은 거 구하는 거구만

오직 하나의 극값? 이 건  $f(x)$ 가 다항함수니까  $F(x)$ 도 다항함수 이고, 다항함수는 모든  $x$ 에 대해서 미분 가능 하지.

따라서  $F'(x) = 0$  인 점에서 좌우 도함수 부호가 변화되는 곳이 딱 1개만 있어야 한다는 거네. 오케이

$F'(x) = f(x) = x^3 - 3x + a$  일 때,  $F'(x) = 0$  이므로

방정식  $x^3 - 3x + a = 0$  을 만족하는 실근이 딱 1개 있어야 한다.

이거 풀면 끝이죠. 근데 방정식에서 실근을 묻는 문제는

함수의 형태로 바뀌어서 만나는 교점의  $x$ 좌표를 구하라고 교과서에서 나와있어.

$y = x^3 - 3x, y = -a$  그래프 그려서 풀면 끝!

제가 계속 이거면 이거니까 저렇게 생각해야지 라면서 근거를 붙이려고 노력하는거 보이세요?

어떤식으로 문제를 푸는 연습을 해야할지 좀 감이 오세요?

그냥 푸는 법을 배우는게 아니라, 철저하게 조건을 보고 무슨 생각을 해야하며, 그 과정에서 어떤 추론을 통해 결국 난 뭘 해야 하는지

이 과정을 정리하고 학습하셔야 한다구요!

한 문제만 더 보조

21. 최고차항의 계수가 1인 다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(3)$ 의 값은? [4점]

- (가)  $f(0) = -3$
- (나) 모든 양의 실수  $x$ 에 대하여  $6x - 6 \leq f(x) \leq 2x^3 - 2$ 이다.

- ① 36      ② 38      ③ 40      ④ 42      ⑤ 44

시뮬레이션

최고차항 계수가 1이라고 주어진 다항함수네. 그리고  $f(3)$ 을 물어봤으니 함수를 결정하는 문제네. 근데 몇차 함수인지 모르니, 차수부터 결정해야겠다.

$f(x) = x^n + \dots$  되겠지.

(가) 조건 됐고, (나) 조건 파악 하는게 핵심이구만.

저 절대부등식은 뭘 얘기하는 거지.

잠깐, 모든 양의실수  $x$ 에 대해서  $f(x) \leq 2x^3 - 2$  라는 건,

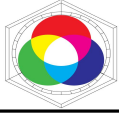
$f(x)$ 가 3차 이하의 함수라는 거 아닌가.

왜냐면,  $x$ 가 아무리 커져도  $f(x) \leq 2x^3 - 2$  되어야하는데  $f(x)$ 가 4차함수가

되어버리면 분명히 나중에  $2x^3 - 2$ 보다 큰 함수값이 있을 거 아냐. 맞네.

$f(x)$ 는 3차 이하의 함수.

근데, 그 다음 모르겠다.

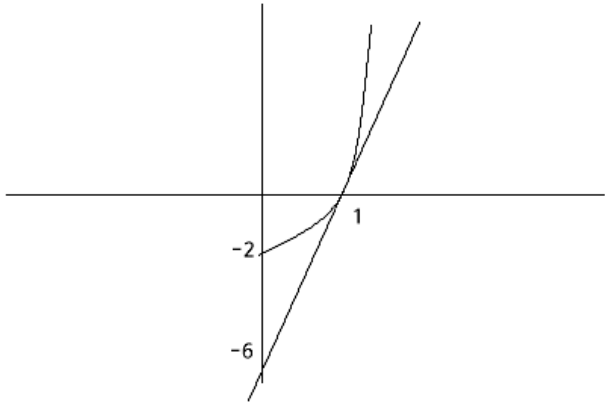


내가 교과서에서 배운 건,  $f(x)$ 의 조건이 부등식으로 주어질 때, 샌드위치 정리 쓰는 것만 알고 있는데, 샌드위치 정리 쓰려면 맨 오른쪽 극한이 같아야 하는데 극한이 같아지게끔 식을 변형 해야하나..

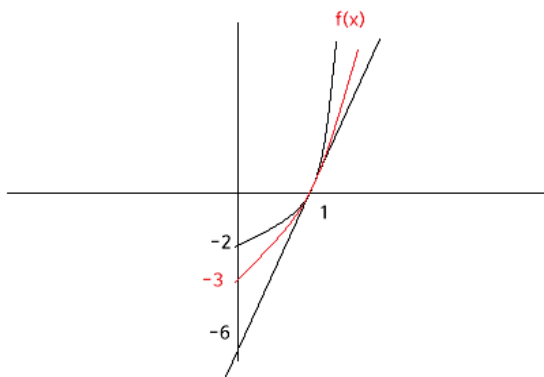
아 정확히 모르겠으니

우선 주어진 함수  $6x - 6, 2x^3 - 2$  를 그려보자.

$x = 1$ 에서 둘다 함숫값이 0 이고 미분계수가 6으로 똑같아서 이렇게 그릴 수 있어.



그리고, 양의 실수  $x$ 에 대해서  $f(x)$ 가 저 두 그래프 사이에 있어야 하니까 잘은 몰라도  $f(x)$ 가 이렇게 그려지겠다.



그리고,  $f(x)$ 는 미분가능한 다항함수이고, 저 두 그래프 사이에 존재해야 하기 때문에, 사실 직관적으로  $f'(1) = 6$  임을 알 수 있어 만약 수식적으로 보여준다고 한다면, (나)조건을 식을 변형하여 샌드위치로 보여줄 수 도 있지만, 그래프만 봐도 확인 가능해.

그럼 이제 3차이하의 함수 중에 몇 차 함수 여야 되는지 확인하면 끝!

1차함수면 안되고, 2차함수면 되나?

문제 조건에 따라  $f(x) = (x+3)(x-1)$  임을 알 수 있고  $f'(1) = 4$  이니까 안 되네!

결국 3차 함수 라는 것이군. 주어진 조건에 의해  $f(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$  이겠다. 끝

계속 끊임없이 문제와 얘기하면서 생각.

이게 핵심입니다.

여기서 학생들이 실수 많이 하는 것! 주의해야할 점

습관적으로 (나) 조건 보고 미분을 그냥 해버리는 경우가 있어요.

$6 \leq f'(x) \leq 6x^2$  이렇게 구해놓고 응? 뭐지 계속 이상한 생각한다구요

**애초에 부등식, 방정식에선 미분하면 절대 안돼!**

$x^3 = 5$  를 양변 미분해봐 안되는 거 알겠죠? 얘기 안해도

그리고, 자꾸 식으로만 풀고 생각하는 것에 익숙한 친구들도 이 문제 잘 못풀었을 거예요.

함수가 나오면 항상 그래프 해석!

꼭 잊지map시다.

자 몇 문제 풀어보면서, 중위권 학생들이

문제를 제대로 풀기위해선 어떻게 해야하는 지 학습해 보았어요.

최대한 여러분의 입장에서 이해가 되게 시뮬레이션을 돌려봤는데 어떨지 모르겠네요.

이해 안되는 부분 있으면 언제든지 댓글~

부디 여러분에게 조금이나마 도움이 되길 바라며

**여러분 후회스럽지 않게 공부합시다.**

**여러분의 수능 날까지 함께 하겠습니다.**

