2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 대학수학능력 수학 가형 문항 대조표			
번호		교과서(미래엔)	수능, 평가원 기출문제(이동훈 기출)
1	○	기벡 82p(본문) 문제9	R007
2	○	미적분2 33p(본문) 문제6	I214, I222
3	○	미적분2 151p(본문) 삼각함수의 부정적분 미적분1 167p(본문) 미적분의 기본 정리	L038
4	○	확통 67p(본문) 여사건의 확률 확통 75p(본문) 조건부확률 확통 80p(본문) 사건의 독립	N120
5	○	확통 21p(본문) 예제2	M037
6	○	기벡 121p(연습) 문제6	K031
7	○	확통 82p(본문) 문제2	N148
8	○	기벡 157p(본문) 예제1	S044
9	○	기벡 162p(본문) 예제1	L037
10	○	기벡 108p(본문) 예제1	Q087
11	○	미적분2 185p(본문) 예제2 미적분2 150p(본문) 문제1	기출 없음
12	○	기벡 204p(본문) 예제5	T038
13	◎	확통 111p(본문) 확률밀도함수의 성질 확통 126p(본문) 예제1	P096
14	◎	중등 기하(원, 삼각형, 평행선) 미적분2 89p(본문) 문제4	J107, J080
15	◎	미적분1 110p(본문) 예제1 미적분1 127p(본문) 함수의 최대최소 미적분2 139p(연습) 문제3	K041(접선), K048(그래프)
16	◎	기벡 90p(본문) 예제2 기벡 174p(본문) 참고	R015(평면벡터), T049(공간벡터)
17	◎	확통 23p(본문) 예제3 확통 95p(본문) 확률질량함수의 성질	M012, M044
18	◉	확통 111p(본문) 확률밀도함수의 성질 확통 114p(본문) 예제2	P104
19	◉	기벡 41p(본문) 문제4 기벡 21p(본문) 문제5	Q057, Q006, Q016
20	◉	미적분1 114p(본문) 평균값의 정리 미적분1 78p(본문) 사이값 정리 미적분1 166p(본문) 적분과 미분의 관계	L054, K043, L066

○ : 교과서 예제 수준의 문제

◎ : 수능/평가원 기출 문제를 풀었던 경험이 있으면 수월하게 풀리는 문제

◉ : 수능/평가원 기출 문제를 풀었던 경험과 교과서의 개념에 대한 정확한 이해를 요구하는 문제

2017학년도 수능 가형 분석

21	◉	미적분1 78p(본문) 사이값 정리 미적분1 171p(본문) 정적분의 성질 미적분1 166p(본문) 적분과 미분의 관계 미적분2 166p(본문) 정적분의 치환적분법	H048, H038, L023
22	○	확통 34p(본문) 중복조합의 수	M110
23	○	미적분2 21p(본문) 문제2	I113
24	○	기벡 205p(본문) 문제9 수학1 179p(본문) 문제2	T027
25	○	미적분2 58p(본문) 삼각함수 사이의 관계 미적분2 70p(본문) 예제1	J052
26	○	확통 58p(본문) 예제1 확통 65p(본문) 예제1 확통 77p(본문) 예제3	M018, N115
27	◉	확통 35p(본문) 예제1	M103
28	◉	기벡 33p(연습) 문제2	Q040
29	◉	기벡 131p(본문) 직선과 평면의 수직 관계 기벡 136p(본문) 예제1 기벡 73p(연습) 문제8 기벡 93p(본문) 예제6	S018, R025, S011
30	◉	미적분2 104p(본문) 함수의 몫의 미분법 미적분1 121p(본문) 극값의 판정 수학1 43p(본문) 인수정리와 인수분해 미적분1 78p(본문) 사이값 정리 미적분1 130p(본문) 예제1 미적분1 126p(본문) 예제1	G149, G120, G024, K107

○ : 교과서 예제 수준의 문제
◎ : 수능/평가원 기출 문제를 풀었던 경험이 있으면 수월하게 풀리는 문제
◉ : 수능/평가원 기출 문제를 풀었던 경험과 교과서의 개념에 대한 정확한 이해를 요구하는 문제

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 가형 1번	이동훈 기출문제집 R007 (2017(9)-가형1)
두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(5,\ -6)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점] (2017-가형1) ① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5	두 벡터 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ 3)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점] ① 1　② 2　③ 3④ 4⑤ 5
[풀이] 성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여 $\vec{a}-\vec{b}=(1-5,\ 3-(-6))=(-4,\ 9)$ 따라서 구하는 값은 5이다. 답 ⑤	[풀이] 평면벡터의 성분에 의한 연산을 하면 $\vec{a}+\vec{b}=(3,\ 2)$ 따라서 구하는 값은 5이다. 답 ⑤
☀ 벡터의 연산에 대한 교과서 예제 수준의 문제	

2017학년도 가형 2번	이동훈 기출문제집 I214 (2012-가형2) 이동훈 기출문제집 I222 (2015-B형2)
$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{\ln(1+3x)}$의 값은? [2점] (2017-가형2) ① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{5x}$의 값은? [2점] ① 5　② e　③ 1　④ $\frac{1}{e}$　⑤ $\frac{1}{5}$ + $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{3x}$의 값은? [2점] ① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$
[풀이] 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{\ln(1+3x)}$ $=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{6x}-1}{6x}\times\frac{1}{\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}}}\times\frac{6x}{3x}$ $=1\times\frac{1}{\ln e}\times2=2$ 답 ②	[풀이] 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}\times\frac{1}{5}$ $=\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}\times\frac{1}{5}$ $=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}\times\frac{1}{5}$ $=\frac{1}{\ln e}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$ 답 ⑤ [풀이] 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}{3}=\frac{\ln e}{3}=\frac{1}{3}$ 답 ③
☀ 함수의 극한에 대한 교과서 예제 수준의 문제(왼쪽의 두 문제를 결합하였다고 생각할 수도 있다.)	

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 가형 3번	이동훈 기출문제집 L038 (2006(9)-가형26)
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx$의 값은? [2점] (2017-가형3) ① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2	$\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x dx$의 값은? [3점] ① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π
[풀이] 미적분의 기본정리에 의하여 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx = [-2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0-(-2) = 2$ 답 ⑤	[풀이] 정적분의 부분적분법에 의하여 $\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x dx$ $= [x(-\cos x)]_{2\pi}^{3\pi} - \int_{2\pi}^{3\pi}(-\cos x)dx$ $= 5\pi + [\sin x]_{2\pi}^{3\pi} = 5\pi$ 답 ⑤
☀ 삼각함수가 포함된 정적분 계산 문제는 주로 치환적분/부분적분이 출제되었으나, 2017학년도 가형 3번에서는 공식을 적용하는 단순한 문제가 출제되었다.	

2017학년도 가형 4번	이동훈 기출문제집 N120 (2011(6)-가형26확률통계)
두 사건 A와 B는 서로 독립이고 $\mathrm{P}(B^C) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\vert B) = \frac{1}{2}$ 일 때, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점] (2017-가형4) ① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{6}$	두 사건 A와 B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cup B) = \frac{1}{2}$ 일 때, $\mathrm{P}(B^C\vert A)$의 값은? (단, B^C는 B의 여사건이다.) [3점] ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$
[풀이] 여사건의 확률에 의하여 $\mathrm{P}(B) = 1-\mathrm{P}(B^C) = \frac{2}{3}$ 조건부확률의 정의에 의하여 $\mathrm{P}(A\vert B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{2}\times\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$ 독립사건의 필요충분조건에 의하여 $\therefore\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{3}$ 답 ④	[풀이] 두 사건 A와 B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ 확률의 덧셈정리에 의하여 $\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 주어진 수를 대입하면 $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$ 풀면 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$ 확률의 덧셈정리에 의하여 $\mathrm{P}(B^C\cap A) = \mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{6}$ 조건부확률의 정의에 의하여 $\therefore\ \mathrm{P}(B^C\vert A) = \frac{\mathrm{P}(B^C\cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{2}{3}$ 답 ④
☀ 2017학년도 가형 4번은 2011학년도 6월 가형 26번을 재출제한 것인데. 여사건(혹은 배반사건)의 확률, 조건부 확률, 독립사건의 필요충분조건의 적용 순서를 바꾸었을 뿐이다.	

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 가형 5번	이동훈 기출문제집 M037 (2016(6)-B형9)
숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의 수는? [3점] (2017-가형5) ① 115 ② 120 ③ 125 ④ 130 ⑤ 135	서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점] ① 1024 ② 1034 ③ 1044 ④ 1054 ⑤ 1064
[풀이] 네 자리의 자연수가 5의 배수이므로 이 자연수의 일의 자리에는 5가 와야 한다. ○○○5 나머지 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$ 답 ③	[풀이] 서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다. ${}_4\Pi_5=4^5=2^{10}=1024$ 답 ①
☀ 중복조합에 대한 교과서 예제 수준의 문제. 2016학년도 6월에 비해서 제한조건이 하나 더 추가되었을 뿐이다.	

2017학년도 가형 6번	이동훈 기출문제집 K031 (2016-B형21)
함수 $f(x)=x^3+x+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값은? [3점] (2017-가형6) ① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ 1	$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),\ t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),\ t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은? [4점] ① $\dfrac{79}{12}$ ② $\dfrac{85}{12}$ ③ $\dfrac{91}{12}$ ④ $\dfrac{97}{12}$ ⑤ $\dfrac{103}{12}$
[풀이1] $g(1)=a$로 두면 역함수의 성질에 의하여 $f(a)=1$ 즉, $a^3+a+1=1$ 정리하면 $a(a^2+1)=0$ 풀면 $a=0$ 함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=3x^2+1$ 역함수의 미분법에 의하여 $\therefore\ g'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=1$ 답 ⑤	[풀이] (풀이의 일부) 역함수의 정의에 의하여 $g(5)=-5$ 역함수의 미분법에 의하여 $g'(5)=\dfrac{1}{y'\|_{x=-5}}=\dfrac{1}{40}$ 함수 $h(x)$의 도함수는 $h'(x)=f(x)-g(x)+x\{f'(x)-g'(x)\}$ 위에서 구한 값들을 대입하면 $\therefore\ h'(5)=f(5)-g(5)+5\{f'(5)-g'(5)\}$ $=3-(-5)+5\times\left(\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{40}\right)=\dfrac{97}{12}$ 답 ④
☀ 2016학년도 B형 21번의 계산과정만을 재출제한 것이다.	

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 나형11번/가형7번	이동훈 기출문제집 N148 (2013(9)-가형3)
한 개의 주사위를 3번 던질 때, 4의 눈이 한 번만 나올 확률은? [3점] (2017-가형7/나형11) ① $\frac{25}{72}$ ② $\frac{13}{36}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{29}{72}$	한 개의 주사위를 6번 던질 때, 홀수의 눈이 5번 나올 확률은? [2점] ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{3}{32}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{5}{32}$ ⑤ $\frac{3}{16}$
[풀이] 주사위를 한 번 던질 때, 4의 눈이 나오는 사건을 A라고 하자. 수학적 확률의 정의에 의하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$ 여사건의 확률의 정의에 의하여 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{5}{6}$ 구하는 확률을 p라고 하자. 독립시행의 확률의 정의에 의하여 $p={}_3\mathrm{C}_1(\mathrm{P}(A))^1(\mathrm{P}(A^C))^2=3\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{72}$ 답 ①	[풀이] 6 이하의 자연수 중에서 홀수는 각각 1, 3, 5이다. 한 개의 주사위를 던질 때, 홀수의 눈이 나올 사건을 A 라고 하면 수학적 확률의 정의에 의하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 여사건의 확률에 의하여 $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 구하는 확률을 p라고 하자. 독립시행의 확률에 의하여 $p={}_6\mathrm{C}_5(\mathrm{P}(A))^5(\mathrm{P}(A^C))^1=\frac{3}{32}$ 답 ②
☀ 사건 A만 바뀌었을 뿐, 독립시행의 확률의 전형적인 풀이를 적용하는 교과서 예제 수준의 문제.	

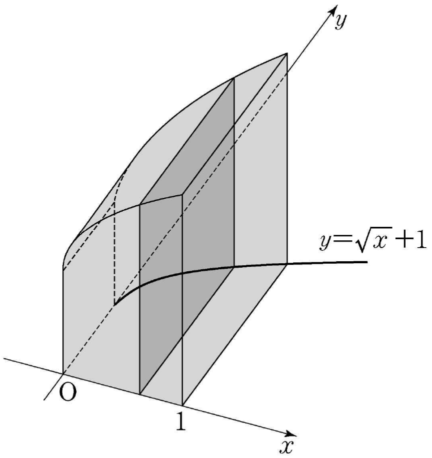
2017학년도 가형 8번	이동훈 기출문제집 S044 (2014(예비)-B형3)
좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ a,\ -6)$, $\mathrm{B}(-3,\ 2,\ b)$에 대하여 선분 AB를 3:2로 외분하는 점이 x축 위에 있을 때, $a+b$의 값은? [3점] (2017-가형8) ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5	좌표공간에서 두 점 $\mathrm{P}(6,\ 7,\ a)$, $\mathrm{Q}(4,\ b,\ 9)$를 이은 선분 PQ를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표가 (2, 5, 14)일 때, $a+b$의 값은? [2점] ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10
[풀이] 선분 AB의 3:2 외분점을 C라고 하자. 점 C가 x축 위에 있으므로 점 C의 y좌표와 z좌표는 모두 0이다. 외분점의 공식에 의하여 (점 C의 y좌표)$=\frac{3\times2-2\times a}{3-2}=0$ (점 C의 z좌표)$=\frac{3\times b-2\times(-6)}{3-2}=0$ a, b에 대한 일차방정식을 풀면 $a=3$, $b=-4$ $\therefore\ a+b=-1$ 답 ①	[풀이] 외분점의 공식에 의하여 $\frac{2\times b-1\times7}{2-1}=5$, $\frac{2\times9-1\times a}{2-1}=14$ 일차방정식을 풀면 $a=4$, $b=6$ $\therefore\ a+b=10$ 답 ⑤
☀ 공간좌표에서 외분점에 대한 교과서 수준의 예제 문제.	

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 가형 9번	이동훈 기출문제집 L037 (2004(9)-자연4)
$\int_1^e \ln\frac{x}{e}dx$의 값은? [3점] (2017-가형9) ① $\frac{1}{e}-1$ ② $2-e$ ③ $\frac{1}{e}-2$ ④ $1-e$ ⑤ $\frac{1}{2}-e$	정적분 $\int_1^e (4x\ln x)dx$의 값은? [2점] ① e^2-1 ② e^2+1 ③ e^2+2 ④ e^2+e-1 ⑤ e^2+2e+2
[풀이] 로그의 성질에 의하여 $\ln\frac{x}{e}=\ln x-\ln e=\ln x-1$ 정적분의 성질에 의하여 $\int_1^e \ln\frac{x}{e}dx=\int_1^e \ln x dx-\int_1^e 1dx$ $=[x\ln x-x]_1^e-[x]_1^e$ ($\because$ 정적분의 부분적분법) $=1-(e-1)=2-e$ 답 ②	[풀이] 정적분의 부분적분법에 의하여 $\int_1^e (4x\ln x)dx=\left[2x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e 2xdx$ $=2e^2-\left[x^2\right]_1^e=e^2+1$ 답 ②
☀ $\ln x$를 포함하는 부분적분법에 대한 문제. 2004학년도 9월 자연 4번에서는 정적분의 계산과 관련된 '실수배'를 물었다면, 2017학년도 가형 9번에서는 정적분의 계산과 관련된 '로그의 성질'을 물었다.	

2017학년도 가형 10번	이동훈 기출문제집 Q087 (2017(9)-가형14)
좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가 $x=t-\frac{2}{t},\ y=2t+\frac{1}{t}$ 이다. 시각 $t=1$에서 점 P의 속력은? [3점] (2017-가형 10) ① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$	매개변수 $t(t>0)$으로 나타내어진 함수 $x=t-\frac{2}{t},\ y=t^2+\frac{2}{t^2}$ 에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [4점] ① $-\frac{2}{3}$ ② -1 ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ -2
[풀이] $\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=2-\frac{1}{t^2}$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는 $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(1+\frac{2}{t^2},\ 2-\frac{1}{t^2}\right)$ $t=1$일 때, 점 P의 속도는 $(3,\ 1)$ 이므로 $t=1$일 때, 점 P의 속력은 $\lvert(3,\ 1)\rvert=\sqrt{10}$ 답 ③	[풀이] $\frac{dx}{dt}=1+\frac{2}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=2t-\frac{4}{t^3}$이고 $\frac{dx}{dt}\neq 0$이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-\frac{4}{t^3}}{1+\frac{2}{t^2}}=\frac{2t^4-4}{t^3+2t}$ $\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right\rvert_{t=1}=-\frac{2}{3}$ 답 ①
☀ 2017학년도 9월 가형 14번의 매개변수의 미분법 문항에 속도/속력 개념을 내적결합한 문제가 출제되었다.	

2017학년도 수능 가형 분석

<table>
<tr><th>2017학년도 가형 11번</th><th>기출 없음</th></tr>
<tr><td>그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}+1$과 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점] (2017-가형 11)


① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3</td><td>교과서 예제 참고</td></tr>
<tr><td>[풀이]
x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 문제에서 주어진 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하자.
사각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
$S(x)=y^2=(\sqrt{x}+1)^2=x+2\sqrt{x}+1$
구하는 입체도형의 부피를 V라고 하자.
입체도형의 부피를 구하는 공식에 의하여
$V=\int_0^1 S(x)dx=\int_0^1 (x+2\sqrt{x}+1)dx$
$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1=\frac{17}{6}$
답 ④</td><td>생략</td></tr>
<tr><td colspan="2">☀ 2017학년도 가형 11번의 출제 근거가 되는 수능/평가원 기출문제는 없다. 그래서 교과서 수준의 예제가 출제된 것이다.</td></tr>
</table>

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 가형 12번	이동훈 기출문제집 T038 (2008(9)-가형6)
좌표공간에서 평면 $2x+2y-z+5=0$과 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점] (2017-가형12) ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$	평면 $2x-y=0$과 평면 $x-3y+kz+2=0$이 이루는 각의 크기가 60°일 때, 양의 상수 k의 값은? [3점] ① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$
[풀이] 평면 $2x+2y-z+5=0$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}=(2,\ 2,\ -1)$ xy평면의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$ 로 두자. 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여 $\therefore\ \cos\theta=\frac{\lvert\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert\lvert\overrightarrow{n_2}\rvert}=\frac{1}{3}$ 답 ④	[풀이] 평면 $2x-y=0$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}$으로 두면 $\overrightarrow{n_1}=(2,\ -1,\ 0)$ 평면 $x-3y+kz+2=0$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_2}$로 두면 $\overrightarrow{n_2}=(1,\ -3,\ k)$ 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 공식에 의하여 $\cos60^{\circ}=\frac{\lvert\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert\lvert\overrightarrow{n_2}\rvert}=\frac{5}{\sqrt{50+5k^2}}$ 즉, $\frac{1}{2}=\frac{5}{\sqrt{50+5k^2}}$ 양변을 제곱하여 정리하면 $k^2=10$ k는 양수이므로 $\therefore\ k=\sqrt{10}$ 답 ④
☀ 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하는 교과서 예제 수준의 문제이다.	

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 가형 13번

정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 1) = \mathrm{P}(\overline{Y} \leq a)$를 만족시키는 상수 a의 값은? [3점] (2017-가형13)

① $\dfrac{19}{8}$　② $\dfrac{5}{2}$　③ $\dfrac{21}{8}$　④ $\dfrac{11}{4}$　⑤ $\dfrac{23}{8}$

[풀이]

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(0,\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

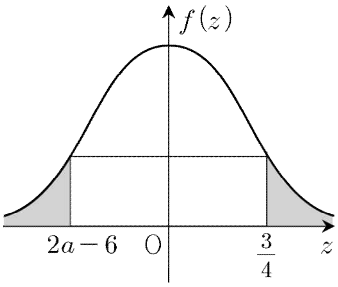
확률변수 $Z = \dfrac{\overline{X}-0}{\dfrac{4}{3}}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 1) = \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{3}{4}\right)$

표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

확률변수 $Z = \dfrac{\overline{Y}-3}{\dfrac{1}{2}}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{Y} \leq a) = \mathrm{P}(Z \leq 2a-6)$



문제에서 주어진 조건에 의하여

$\mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{3}{4}\right) = \mathrm{P}(Z \leq 2a-6)$

표준정규분포의 확률밀도함수는 직선 $z=0$에 대하여 대칭이므로

$2a-6+\dfrac{3}{4} = 0$

a에 대한 일차방정식을 풀면

$a = \dfrac{21}{8}$

답 ③

이동훈 기출문제집 P096 (2012(9)-나형16)

어느 공장에서 생산되는 제품 A의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1)$을 따르고, 제품 B의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 4)$를 따른다. 이 공장에서 생산된 제품 A와 제품 B에서 임의로 제품을 1개씩 선택할 때, 선택된 제품 A의 무게가 k 이상일 확률과 선택된 제품 B의 무게가 k 이하일 확률이 같다. $\dfrac{k}{m}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{11}{9}$　② $\dfrac{5}{4}$　③ $\dfrac{23}{18}$　④ $\dfrac{47}{36}$　⑤ $\dfrac{4}{3}$

[풀이]

제품 A의 무게를 X라고 하면,

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$을 따른다.

$Z = \dfrac{X-m}{1}$으로 두면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

제품 A의 무게가 k 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X \geq k) = \mathrm{P}(Z \geq k-m)$

제품 B의 무게를 Y라고 하면,

확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 2^2)$을 따른다.

$Z = \dfrac{Y-2m}{2}$으로 두면

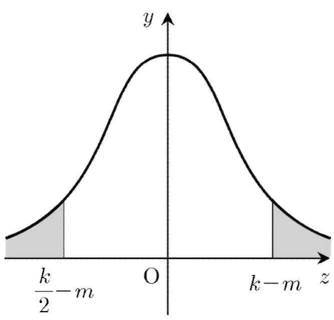
확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

제품 B의 무게가 k 이하일 확률은

$\mathrm{P}(Y \leq k) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{k-2m}{2}\right)$

주어진 조건에서

$\mathrm{P}(Z \geq k-m) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{k-2m}{2}\right)$

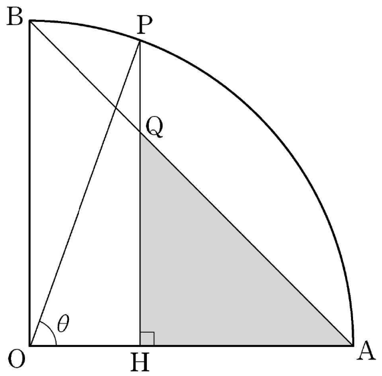
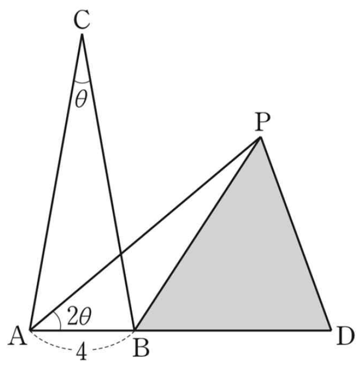


표준정규분포의 확률밀도함수의 그래프에서

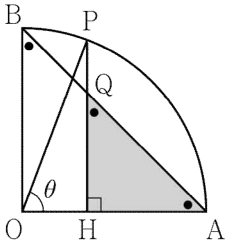
$k-m = -1 \times \left(\dfrac{k}{2}-m\right)$ 정리하면 $\therefore\ \dfrac{k}{m} = \dfrac{4}{3}$

답 ⑤

☀ 2012학년도 9월 나형 16번에 표본평균($\overline{X}$)을 내적 결합시켜서 출제되었다. 평가원이 새로운 문제를 방식을 보여주는 문제.

2017학년도 가형 14번	이동훈 기출문제집 J107 (2014-B형28) 이동훈 기출문제집 J080 (2009(6)-가형28)
그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POH}=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점] (2017-가형14)  ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$	그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\angle \mathrm{ACB}=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$인 점 D를 잡고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AP}}$이고 $\angle \mathrm{PAB}=2\theta$인 점 P를 잡는다. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta \to 0+}(\theta \times S(\theta))$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]  + 연속함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x \to 0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=2$를 만족시킬 때, $\lim\limits_{x \to 0}\frac{f(x)}{x^p}=q$이다. $p+q$의 값은? (단, $p>0$, $q>0$이다.) [3점] ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[풀이] (풀이의 일부)



한편 직각삼각형 POH에서 삼각비의 정의에 의하여

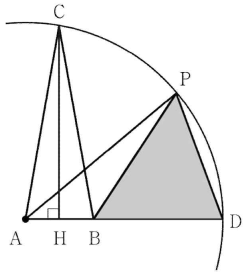
$\overline{\mathrm{OH}}=\cos\theta$이므로 $\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OH}}=1-\cos\theta$

이등변삼각형의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{HA}}=1-\cos\theta$

[풀이2] (풀이의 일부)

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(\theta)=(\triangle\mathrm{ADP}$의 넓이$)-(\triangle\mathrm{ABP}$의 넓이$)$

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}}\,\overline{\mathrm{AP}}\sin2\theta-\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AP}}\sin2\theta$

$=\dfrac{2\sin2\theta\left(1-2\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$

☀ 중학교 수준의 기하 성질들을 이용하여 보조선을 긋는다.

그리고 길이 혹은 넓이를 구할 때, 여집합의 관점을 적용하는 것을 물었다.

(왼쪽) $\overline{\mathrm{HA}}=\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OH}}$

(오른쪽) $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AB}}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)^2$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right\}^2$

$=\frac{1}{2}\times\left(1^2\times\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$

답 ①

[풀이]

$\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=\frac{f(x)(1+\cos(x^2))}{\sin^2(x^2)}$

$=\frac{f(x)}{x^4}\left(\frac{1}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}\right)^2(1+\cos(x^2))$

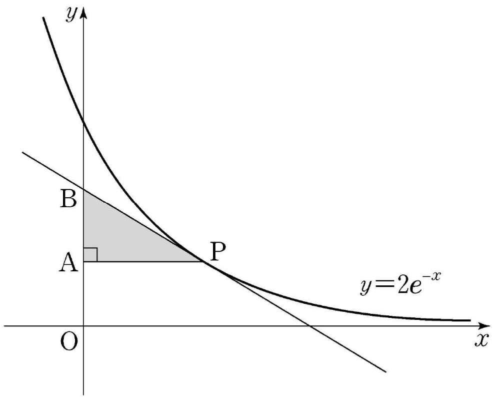
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right)^2\frac{1}{1+\cos(x^2)}$

$=2\times1^2\times\frac{1}{2}=1$

☀ 삼각함수의 극한에서 $\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$의 꼴을 찾아내는 것을 묻고 있다.

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 가형 15번	이동훈 기출문제집 K041 (2016-B형7) 이동훈 기출문제집 K048 (2003(9)-자연6)
곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2e^{-t})\ (t>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값은? [4점] (2017-가형15)  ① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ e	곡선 $y=3e^{x-1}$ 위의 점 A에서의 접선이 원점 O를 지날 때, 선분 OA의 길이는? [3점] ① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$ ⇩ 함수 $f(x)=x^n e^{-x}$에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, n은 자연수) [3점] ㄱ. n이 짝수일 때, $f(x)$의 최솟값은 0이다. ㄴ. n이 짝수일 때, $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고 $x=n$에서 극댓값을 갖는다. ㄷ. n이 홀수일 때, $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고 $x=n$에서 극솟값을 갖는다. ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[풀이]

함수 $y=2e^{-x}$의 도함수는

$y'=-2e^{-x}$

점 P에서의 접선의 방정식은

$y=-2e^{-t}(x-t)+2e^{-t}$

정리하면

$y=-2e^{-t}x+2(t+1)e^{-t}$

[풀이] (풀이의 일부)

문제에서 주어진 함수의 도함수는

$y'=3e^{x-1}$

점 A의 x좌표를 t로 두자.

점 A에서의 접선의 방정식은

$y=3e^{t-1}(x-t)+3e^{t-1}$

답 ⑤

☀ 지수함수 위의 점에서의 접선의 방정식을 구한다.

삼각형 APB의 넓이를 $f(t)$로 두면

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BA}}\times\overline{\mathrm{AP}}=t^2e^{-t}\,(t>0)$

함수 $f(t)$의 도함수는

$f'(t)=(2t-t^2)e^{-t}=t(2-t)e^{-t}$

$f'(t)=0$을 풀면 $t=2$

$t=2$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 극댓값을 갖는다.

$\lim_{t\to0+}f(t)=0$, $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^t}=0$

이므로 함수 $f(t)$는 $t=2$일 때, 최댓값을 갖는다.

이때, 최댓값은 $f(2)=\frac{4}{e^2}$이다.

답 ④

[풀이] (풀이의 일부)

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$

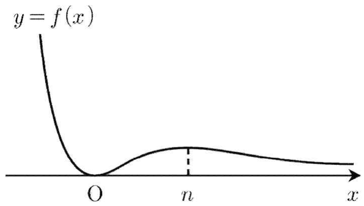
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=n$

(1) n이 짝수인 경우

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. 이때, 극솟값은 $f(0)=0$이다.

$x=n$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다. 이때, 극댓값은 $f(n)=n^ne^{-n}$이다.

그리고 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는



답 ③

☀ 2003학년도 9월 자연 6번에서 $n=2$일 때가 2017학년도 가형 15번의 풀이과정에서 나오는 함수와 동일하다. 이처럼 평가원에서는 교과서의 본문에 나와 있는 함수들 중에서 중요하다고 생각되는 함수들을 지속적으로 출제의 소재로 하고 있다. 서로 다른 두 기출문제를 내적 결합하여 새로운 문제를 만드는 것은 평가원이 즐겨 사용하는 방식.

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 가형 16번	이동훈 기출문제집 R015 (2005(예비)-가형14) 이동훈 기출문제집 T049 (2014(예비)-B형28)

좌표공간에서 원점에 대한 세 점 A, B, C의 위치벡터를 차례로 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 할 때, 이들 벡터 사이의 내적을 표로 나타내면 다음과 같다.

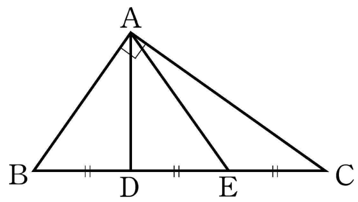
$\cdot$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	2	1	$-\sqrt{2}$
$\vec{b}$	1	2	0
$\vec{c}$	$-\sqrt{2}$	0	2

예를 들어 $\vec{a}\cdot\vec{c}=-\sqrt{2}$이다. 세 점 A, B, C에 대하여 두 점 사이의 거리의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]
(2017-가형16)

① $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}}<\overline{\mathrm{BC}}$
② $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{BC}}<\overline{\mathrm{AC}}$
③ $\overline{\mathrm{AC}}<\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{BC}}$
④ $\overline{\mathrm{BC}}<\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}}$
⑤ $\overline{\mathrm{BC}}<\overline{\mathrm{AC}}<\overline{\mathrm{AB}}$

다음은 $\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 변 BC의 삼등분점을 각각 D와 E라고 할 때,

$\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{DE}}^2=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{BC}}^2$이 성립함을 벡터를 이용하여 증명한 것이다.



<증명>
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$로 놓으면 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}-\vec{a}$이고 다음이 성립한다.

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=$ (가)
$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=$ (나)
$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})$

그러므로 다음을 얻는다.

$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=$ (다)
$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2=$ (라)
$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2)$
$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$
$=\frac{2}{3}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b})$
$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

이때, $\vec{a}\perp\vec{b}$이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이고 다음이 성립한다.

$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=\frac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{DE}}^2=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{BC}}^2$ 이다.

위의 증명에서 (가)와 (라)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(라)
①	$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$	$\frac{1}{9}(\|\vec{a}\|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\|\vec{b}\|^2)$
②	$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$	$\frac{1}{9}(4\|\vec{a}\|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2)$
③	$\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$	$\frac{1}{9}(\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2)$
④	$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$	$\frac{1}{9}(\|\vec{a}\|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\|\vec{b}\|^2)$
⑤	$\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$	$\frac{1}{9}(4\|\vec{a}\|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2)$

+
좌표공간에서 세 직선

$x=-y=\frac{z}{2}$, $x=y=\frac{z}{2a}$, $x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{a}$

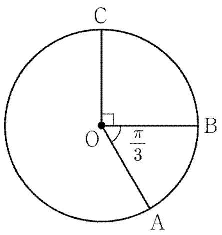
가 같은 평면 위에 있을 때, $20a$의 값을 구하시오. (단, $a\neq0$이다.) [4점]

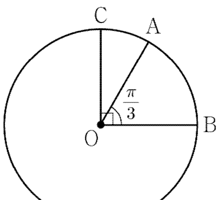
[풀이1] (풀이의 일부)
벡터의 내적의 성질에 의하여
$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2$
$= |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2$
$= 2 - 2 \times 1 + 2 = 2$
$|\overrightarrow{AB}|^2 < |\overrightarrow{BC}|^2 < |\overrightarrow{AC}|^2$
$|\overrightarrow{AB}| > 0$, $|\overrightarrow{BC}| > 0$, $|\overrightarrow{AC}| > 0$이므로
$|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{BC}| < |\overrightarrow{AC}|$
$\therefore\ \overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$
답 ②

[풀이] (풀이의 일부)
벡터의 내적의 성질에 의하여
$|\overrightarrow{BC}|^2 = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$
$= |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
이때, $\vec{a} \perp \vec{b}$이므로 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$이고 다음이 성립한다.
$$|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AE}|^2 + |\overrightarrow{DE}|^2 = \frac{2}{3}|\overrightarrow{BC}|^2$$
따라서 $\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = \frac{2}{3}\overline{BC}^2$ 이다.
답 ①

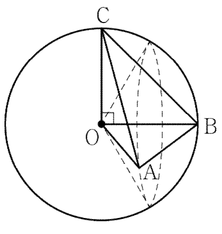
☀ $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}|$ (선분의 길이=벡터의 크기), $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + |\vec{b}|^2$(벡터 내적의 성질)
위의 두 식을 이용하는 교과서 예제 수준의 벡터 내적의 성질을 묻고 있다. 2005학년도 예비 평가에서는 평면벡터를 소재로 하고 있고, 2017학년도에는 공간 벡터를 소재로 하고 있는 것이 차이점. 평가원이 새로운 문제를 만드는 방식 중의 하나이다. (평면→공간)

[참고]
네 점 O, A, B, C가 한 평면 위에 있지 않음을 보이자.
한 직선 위에 있지 않은 세 점 O, B, C로 결정되는 평면 OBC 위에 점 A가 있다고 가정하자.





위의 그림에서
$\angle AOC = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $\angle AOC = \frac{\pi}{6}$
이므로 이는 가정에 모순이다.
따라서 네 점 O, A, B, C는 한 평면 위에 있지 않다.
다시 말하면 사면체 OABC가 결정된다.



[풀이6]
문제에서 주어진 세 직선을 가장 왼쪽부터 순서대로 각각 l, m, n이라고 하자.
이때, 다음의 두 가지 조건이 성립한다.
(가) 세 직선 l, m, n은 모두 원점을 지난다.
(나) 세 직선 l, m, n의 방향벡터 중에서 어느 두 벡터도 서로 평행하지 않는다.
$x=1$일 때, 세 직선 l, m, n이 지나는 점을 각각 A, B, C라고 하자.
세 점 A, B, C의 좌표는 각각
$A(1,\ -1,\ 2)$, $B(1,\ 1,\ 2a)$, $C(1,\ -2,\ a)$
벡터의 덧셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$
을 만족시키는 실수 t, s가 반드시 존재한다.
성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여
$(1,\ -2,\ a) = t(1,\ -1,\ 2) + s(1,\ 1,\ 2a)$
$= (t+s,\ -t+s,\ 2t+2as)$
벡터의 상등에 의하여
$t+s=1$, $-t+s=-2$, $2t+2as=a$
연립하면
$t = \frac{3}{2}$, $s = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$
$\therefore\ 20a = 30$
답 30

☀ 공간에서 세 벡터가 한 평면 위에 있는 경우, 한 평면 위에 있지 않은 경우에 대한 문제는 꾸준하게 출제되고 있다.

<table>
<tr><th>2017학년도 가형17번/나형19번</th><th>이동훈 기출문제집 M012 (2010(6)-가형25/나형25)
이동훈 기출문제집 M044 (2007(9)-가형30이산수학)</th></tr>
<tr><td>

좌표평면 위의 한 점 (x, y)에서 세 점 $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x+1, y+1)$ 중 한 점으로 이동하는 것을 점프라 하자.

점프를 반복하여 점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 모든 경우 중에서, 임의로 한 경우를 선택할 때 나오는 점프의 횟수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, 각 경우가 선택되는 확률은 동일하다.)

점프를 반복하여 점 $(0, 0)$에서 점 $(4, 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 $k=$ $\boxed{\text{(가)}}$ 이고, 가장 큰 값은 $k+3$이다.

$\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{4!}{3!}=\dfrac{4}{N}$

$\mathrm{P}(X=k+1)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{5!}{2!2!}=\dfrac{30}{N}$

$\mathrm{P}(X=k+2)=\dfrac{1}{N}\times\boxed{\text{(나)}}$

$\mathrm{P}(X=k+3)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{7!}{3!4!}=\dfrac{35}{N}$

이고

$\displaystyle\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=1$

이므로 $N=$ $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{i=k}^{k+3}\{i\times P(X=i)\}=\dfrac{257}{43}$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 190 ② 193 ③ 196 ④ 199 ⑤ 202

</td><td>

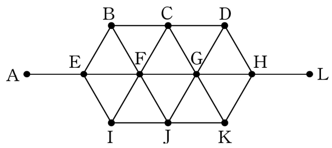
좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x, y)\mid x$와 y는 정수$\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

점 P에서 한 번의 '점프'로 점 Q로 이동할 때, 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$이다.

점 $\mathrm{A}(-2, 0)$에서 점 $\mathrm{B}(2, 0)$까지 4번만 '점프'하여 이동하는 경우의 수를 구하시오. (단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.) [4점]

+

그림은 지점 A부터 지점 L까지 12개의 지점을 연결한 것이다.



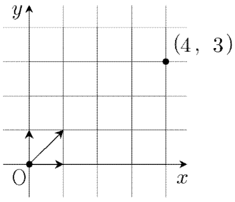
지점 A에서 출발하여 5개의 지점을 거쳐 지점 L에 도착하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

</td></tr>
</table>

[풀이] (풀이의 일부)

<과정>

원점에서 한 번 점프하여 이동할 수 있는 점은 아래 그림과 같다.

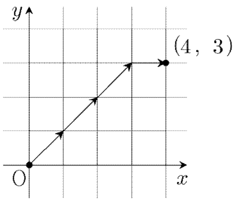


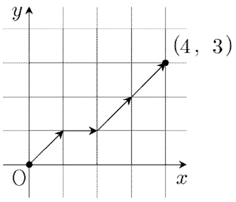
만약 이동 과정에서 ↗ 방향으로의 점프가 4회 이상이면 도착한 점의 y좌표가 4 이상이므로 문제에서 주어진 조건에 모순이다. 따라서 이동 과정에서 ↗ 방향으로의 점프는 3회 이하여야 한다.

↗ 방향으로의 점프가 3회인 경우

: ↗, ↗, ↗, → (4번 이동)

예를 들어



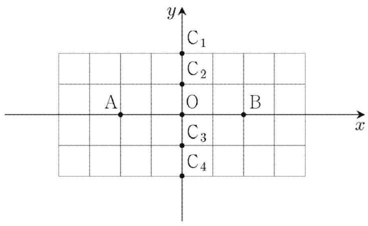


같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}$

답 ②

[풀이1] (풀이의 일부)



(1) $\mathrm{A} \to \mathrm{C}_1 \to \mathrm{B}$인 경우

점 A에서 2번 '점프'하여 점 C_1에 도착하는 방법은

(↗, ↗)

점 C_1에서 2번 '점프'하여 점 B에 도착하는 방법은

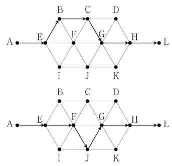
(↘, ↘)

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 $1 \times 1 = 1$

답 19

[풀이]

예를 들어 아래 그림과 같이 이동하면 된다.



구하는 경우의 수는 →, →, ↗, ↘를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로 같은 것이 있는 순열의 수에 의하여

$\frac{4!}{2!} = 12$

답 12

☀ 2010학년도 6월에 출제된 문제에서 사용된 '점프'라는 단어가 다시 출제됨.

2010학년도 6월은 대칭성에 의하여 반드시 지나는 y축 위의 점으로 케이스 구분하는 것이 편한 반면에, 2017학년도 11월은 대칭성과 관련이 없으므로 ↗의 개수로 케이스 구분하는 것이 편하다. (출제의 관점에서 보면 2010학년도 6월 문제에서 대칭성을 삭제하여 2017학년도 11월 문제를 만든 것으로 볼 수 있다.) 2007학년도 9월 이산수학 문제도 동일한 상황을 다루고 있다.

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 가형18번/나형29번

[나형] 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$

(나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때 $\mathrm{P}(17 \le X \le 18) = a$이다. $1000a$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

(2017-가형18/나형29)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

이동훈 기출문제집 P104 (2016(9)-B형18)

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$$f(12) = g(26),\ \mathrm{P}(Y \ge 26) \ge 0.5$$

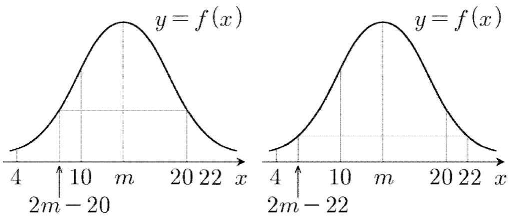
일 때, $\mathrm{P}(Y \le 20)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0896

④ 0.1587 ⑤ 0.2255

[풀이] (풀이의 일부)



조건 (나)에 의하여

$f(4) < f(22) = f(2m-22)$

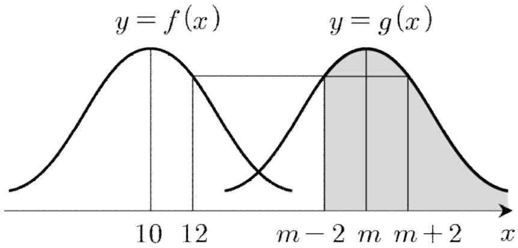
$x \le m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$4 < 2m-22$ 풀면 $m > 13$

m의 범위는 $13 < m < 15$이고, m은 자연수이므로

$m = 14$

[풀이] (풀이의 일부)



만약 $m+2 = 26$이면

$\mathrm{P}(Y \ge 26) < 0.5$

이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $m-2 = 26$이다. 즉, $m = 28$

☀ 케이스 구분과 귀류법을 이용하여 평균(m)을 구한다.

(왼쪽) (가) $f(10) > f(20)$, (나) $f(4) < f(22)$

(오른쪽) $f(12) = g(26)$

2016학년도 9월에서는 방정식을 주었는데, 난이도를 높이기 위하여, 2017학년도 11월에는 부등식을 주었으며, 구간을 찾아서 정수를 결정하도록 하였다. '방정식→부등식', '구간에 속한 정수 찾기'는 평가원이 문제의 난이도를 높이기 위하여 즐겨 사용하는 방법들이다.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 5^2)$을 따르므로

$Z = \dfrac{X-14}{5}$ 로 두면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

$\therefore\ a = \mathrm{P}(17 \le X \le 18) = \mathrm{P}(0.6 \le Z \le 0.8)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)$

$= 0.288 - 0.226 = 0.062$

$\therefore\ 1000a = 62$

답 62

확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(28,\ 4^2)$를 따르므로 확률변수 $Z = \dfrac{Y-28}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

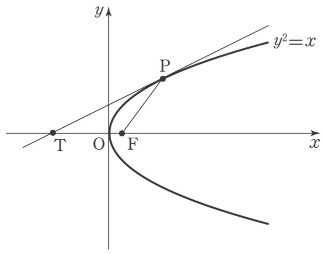
$\therefore\ \mathrm{P}(Y \le 20) = \mathrm{P}(Z \le -2)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

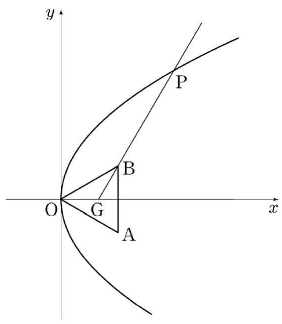
$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

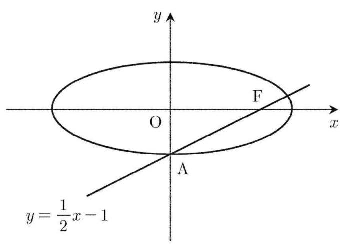
답 ②

☀ 나머지 계산은 교과서 예제 수준이다.

<table>
<tr><td>2017학년도 가형 19번</td><td>이동훈 기출문제집 Q057 (2005(9)-가형15)
이동훈 기출문제집 Q006 (2012(6)-가형29)
이동훈 기출문제집 Q016 (2003-자연5)</td></tr>
<tr><td>두 양수 k, p에 대하여 점 $\mathrm{A}(-k,\ 0)$에서 포물선 $y^2=4px$에 그은 두 접선이 y축과 만나는 두 점을 각각 F, F′, 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 할 때, $\angle \mathrm{PAQ}=\frac{\pi}{3}$이다. 두 점 F, F′을 초점으로 하고 두 점 P, Q를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3}+12$일 때, $k+p$의 값은? [4점] (2017-가형19)
① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16</td>
<td>다음은 포물선 $y^2=x$ 위의 꼭짓점이 아닌 임의의 점 P에서의 접선과 x축과의 교점을 T, 포물선의 초점을 F라고 할 때, $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FT}}$임을 증명한 것이다.


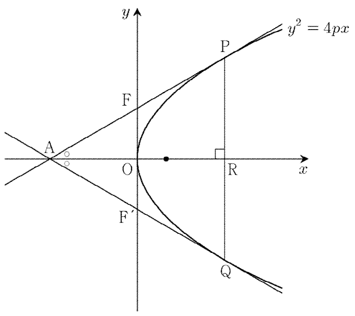
<증명>
점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라고 하면, 접선의 방정식은
(가)
이 식에 $y=0$을 대입하면 교점 T의 좌표는 $(-x_1,\ 0)$이다. 초점 F의 좌표는 (나) 이므로 $\overline{\mathrm{FT}}=$ (다)
한편 $\overline{\mathrm{FP}}=\sqrt{\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2+y_1^2}=$ (다)
따라서 $\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{FT}}$이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은? [3점]
(보기 생략)

그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x축 위에 있다. 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 선분 GP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다) [4점]


그림과 같이 원점을 중심으로 하는 타원의 한 초점을 F라 하고, 이 타원이 y축과 만나는 한 점을 A라고 하자. 직선 AF의 방정식이 $y=\frac{1}{2}x-1$일 때, 이 타원의 장축의 길이는? [2점]


① $4\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ 5
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{5}$</td></tr>
</table>

[풀이1]



점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$으로 두자.

(단, $x_1>0$, $y_1>0$)

점 P는 문제에서 주어진 포물선 위에 있으므로

$y_1^2=4px_1$ …㉠

포물선의 방정식에서 음함수의 미분법에 의하여

$2y\dfrac{dy}{dx}=4p$ 즉, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y}$ …㉡

포물선 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=\dfrac{2p}{y_1}(x-x_1)+y_1$ 즉, $y=\dfrac{2p}{y_1}x+\dfrac{2px_1}{y_1}$

이 접선이 점 $\mathrm{A}(-k,\ 0)$을 지나므로

$0=\dfrac{2p}{y_1}\times(-k)+\dfrac{2px_1}{y_1}$ 즉, $x_1=k$

이를 ㉠에 대입하여 점 P의 좌표를 구하면

$\mathrm{P}(k,\ 2\sqrt{pk})$

[참고] (풀이의 일부)

점 P는 포물선 $y^2=x$ 위의 점이므로

$y_1^2=x_1$ …㉠

음함수의 미분법에 의하여

$2y\dfrac{dy}{dx}=1$ 즉, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y}$

포물선 $y^2=x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2y_1}(x-x_1)+y_1$ 즉, $y=\dfrac{1}{2y_1}x-\dfrac{x_1-2y_1^2}{2y_1}$

접선의 방정식에 ㉠을 대입하면

$y=\dfrac{1}{2y_1}x+\dfrac{x_1}{2y_1}$

정리하면

$2y_1y=x+x_1$

이 식에 $y=0$을 대입하면 교점 T의 좌표는

$\mathrm{T}(-x_1,\ 0)$

☀ 음함수의 미분법을 이용하여 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구한다.

2005학년도 9월 가형 15번에서 얻은 결과(두 점 P, T의 x좌표의 절댓값은 같다.)를 이용하면 2017학년도 가형 19번에서 주어진 점 P의 x좌표가 k임을 바로 알 수 있다.

두 직각삼각형 APR, AQR은 서로 합동이므로

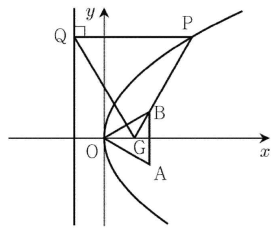
$\angle\mathrm{PAR}=\angle\mathrm{QAR}=\dfrac{\pi}{6}$

포물선 위의 점 P에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2p}{y_1}=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (∵㉡)

[풀이1] (풀이의 일부)

점 P에서 주어진 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 Q라고 하자.



정삼각형 OAB의 꼭짓점 O와 무게중심 G가 x축 위에 있으므로 $\angle\mathrm{BOG}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BOA}=30^\circ$

무게중심 G는 정삼각형 OAB의 외심이므로

$\overline{\mathrm{OG}}=\overline{\mathrm{GB}}$

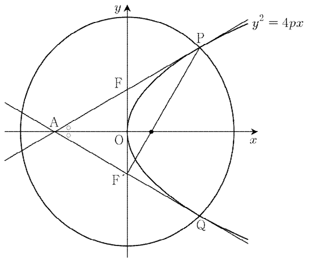
이등변삼각형 OGB에 대하여 $\angle\mathrm{OBG}=30^\circ$

삼각형 OGB에 대하여 $\angle\mathrm{G}$의 외각의 크기는 60°이므로 직선 GP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60°이다.

☀ 정삼각형의 성질에 의하여 직선의 기울기를 구한다.

(왼쪽) 직선 AP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 30°이다.

(오른쪽) 직선 GP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60°이다.



두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{k^2+pk}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=\sqrt{k^2+9pk}$

㉢을 위의 식에 대입하면

$\overline{\mathrm{PF}}=2\sqrt{3}p$, $\overline{\mathrm{PF'}}=6p$

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=2\sqrt{3}p+6p=4\sqrt{3}+12$ 답 ①

[풀이1] (풀이의 일부)

주어진 직선의 x절편과 y절편이 각각 2와 -1이므로

두 점 F, A의 좌표는 각각

$\mathrm{F}(2,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ -1)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{(2-0)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{5}$

타원의 정의에 의하여

∴ (타원의 장축의 길이)$=2\overline{\mathrm{AF}}=2\sqrt{5}$

답 ⑤

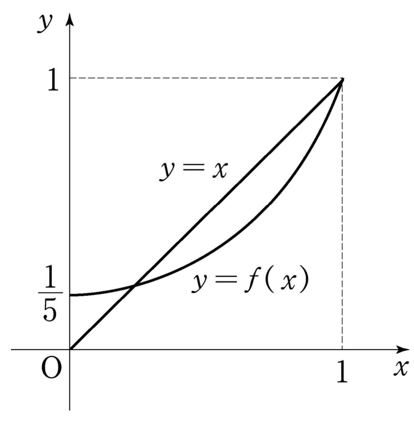
☀ 타원의 정의($\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=$(장축의 길이))에 의하여 장축의 길이를 구한다.

2017학년도 가형 19번은 Q057, Q006, Q016의 세 문항이 물리적으로 결합된 것이며, 평가원이 난이도 높은 새로운 문항을 만드는 방식 중의 하나이다.

2017학년도 수능 가형 분석

<table>
<tr><td>2017학년도 가형 20번</td><td>이동훈 기출문제집 L054 (2010(9)-가형29)
이동훈 기출문제집 K043 (2007(9)-가형28)
이동훈 기출문제집 L066 (2006(9)-가형28)</td></tr>
<tr><td>함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] (2017-가형20)
ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$
ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.
ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ</td><td>함수 $f(x)=\sin\frac{x^2}{2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]
ㄱ. $0<x<1$일 때, $x^2\sin\frac{x^2}{2}<f(x)<\cos\frac{x^2}{2}$이다.
ㄴ. 구간 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록이다.
ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx\le\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 $f(-1)=-1$, $f(0)=1$, $f(1)=0$을 만족시킬 때, 다음 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]
ㄱ. $f(a)=\frac{1}{2}$인 실수 a가 구간 $(-1,\ 1)$에 두 개 이상 존재한다.
ㄴ. $f'(b)=-1$인 실수 b가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.
ㄷ. $f''(c)=0$인 실수 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

오른쪽 그림은 직선 $y=x$와 다항함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부이다. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이고 $f(0)=\frac{1}{5}$, $f(1)=1$일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(x)=\frac{4}{5}$인 x가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.
ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{1}{5}}^1 f^{-1}(x)dx=1$
ㄷ. $g(x)=(f\circ f)(x)$일 때, $g'(x)=1$인 x가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ</td></tr>
</table>

[풀이] (풀이의 일부)

ㄱ. (참)

$f(\sqrt{\pi})=e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt$

$s=t^2$으로 두면

t가 닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에 속하는 실수일 때,

s는 닫힌구간 $[0,\ \pi]$에 속하는 실수이다.

닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 $\sin(t^2)=\sin s\geq 0$이므로

$\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt\geq 0$

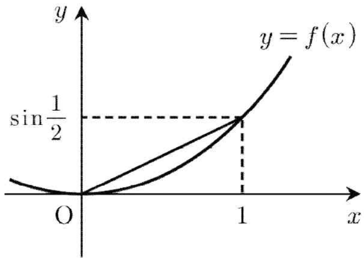
이때, $\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt$의 값이 0은 아니다.

왜냐하면 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 $\sin(t^2)>0$이기 때문이다. $e^{-\sqrt{\pi}}>0$, $\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt>0$이므로 $\therefore\ f(\sqrt{\pi})>0$

[풀이] (풀이의 일부)

ㄷ. (참)

구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.



위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 세 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $\left(1,\ \sin\frac{1}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이보다 작으므로

$\therefore\ \int_0^1 f(x)dx\leq\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

☀ 2010학년도 9월 가형 29번에서 주어진 함수 $f(x)=\sin\frac{x^2}{2}$가 2017학년도 가형 20번에서 다시 출제된 것으로, 2010학년도 9월 가형 29번에서 이 함수의 그래프의 개형을 그리는 연습을 한 경험을 요구한 것이다.

ㄴ. (참)

○ 함수 $f(x)$의 $x=0$, $x=\sqrt{\pi}$에서의 함숫값

$f(\sqrt{\pi})=p\,(>0)$로 두자.

$f(0)=e^0\int_0^0\sin(t^2)dt=1\times 0=0$

○ $f(x)$의 연속성과 미분가능성

적분과 미분의 관계에 의하여

$\frac{d}{dx}\int_0^x\sin(t^2)dt=\sin(x^2)$이므로

함수 $\int_0^x\sin(t^2)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. 두 함수 e^{-x}, $\int_0^x\sin(t^2)dt$는 각각 x에 대하여 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

○ 평균값의 정리

닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고

열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여

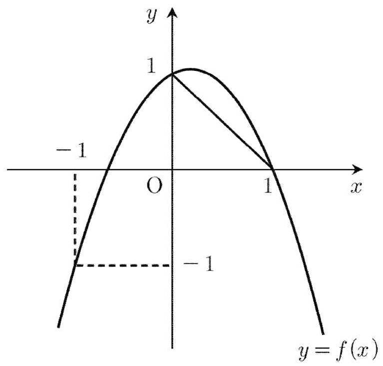
$\frac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}=\frac{p}{\sqrt{\pi}}=f'(a)$

인 a가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $\frac{p}{\sqrt{\pi}}>0$이므로 주어진 명제는 참이다.

[풀이] (풀이의 일부)

ㄴ. (참)



함수 $f(x)$가 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고

구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로

평균값의 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=-1=f'(b)$

인 b가 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(b)=-1$인 실수 b가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

☀ 2007학년도 9월 가형 28번(ㄴ), 2017학년도 가형 20번(ㄴ) 두 문제 모두 곡선 위의 두 점이 주어졌을 때, 평균값 정리를 이용하여 순간변화율의 존재성에 대해서 묻고 있다. $f'(a)>0$은 $f'(a)=k$, $k>0$으로 생각해야 한다. (단, k는 상수)

ㄷ. (참)

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x) = e^{-x}\left(\sin(x^2) - \int_0^x \sin(t^2)dt\right)$$

세 함수 e^{-x}, $\sin(x^2)$, $\int_0^x \sin(t^2)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $f'(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

그러므로 실수 전체의 집합에서 $f'(x)$는 연속이다.

닫힌구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 함수 $f(x)$가 연속이고

$f'(a) = \frac{p}{\sqrt{\pi}} > 0$,

$f'(\sqrt{\pi}) = -e^{-\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)dt < 0$이므로

사이값 정리에 의하여 $f'(b) = 0$을 만족시키는

b가 열린구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

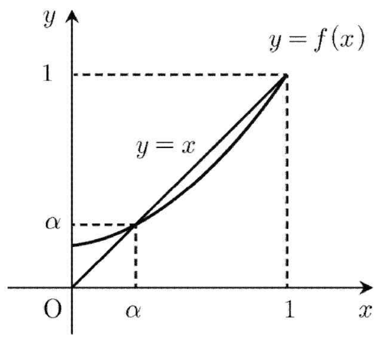
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

ㄷ. (참)

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$의 두 교점 중에서 x좌표가 1이 아닌 점의 x좌표를 α라고 하자.

(단, $0 < \alpha < 1$)



$g(1) = f(f(1)) = f(1) = 1$

$g(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$

함수 $g(x)$의 그래프는 두 점 $(\alpha,\ \alpha)$, $(1,\ 1)$을 지난다.

$f(x)$가 다항함수이므로 $g(x)$도 다항함수이다.

구간 $[\alpha,\ 1]$에서 함수 $g(x)$가 연속이고

구간 $(\alpha,\ 1)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하므로

평균값의 정리에 의하여

$$\frac{g(1) - g(\alpha)}{1 - \alpha} = 1 = g'(d)$$

를 만족시키는 d가 구간 $(\alpha,\ 1)$에 적어도 하나 이상 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

☀ 2006학년도 9월 가형 28번(ㄷ)과 2017학년도 가형 20번(ㄷ)에서는 구간의 포함관계를 묻고 있다.

구간 $(\alpha,\ 1)$에서 $g'(d) = 1$이 존재하므로, 구간 $(0,\ 1)$에서 $g'(d) = 1$이 존재한다. (평균값의 정리)

왜냐하면 $(\alpha,\ 1) \subset (0,\ 1)$

구간 $(a,\ \sqrt{\pi})$에서 $f'(b) = 0$이 존재하므로, 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 $f'(b) = 0$이 존재한다. (사이값 정리)

왜냐하면 $(a,\ \sqrt{\pi}) \subset (0,\ \sqrt{\pi})$

평균값의 정리에서 사이값 정리로 사용되는 정리만 바뀌었을 뿐, 묻고 있는 바는 동일하다.

그리고 2017학년도 가형 20번(ㄷ)에서는 '도함수⊂함수'의 개념도 묻고 있다. 특히 가형 응시자의 경우에는

$$\int_a^x f(t)dt \ \rightarrow\ f(x)\ \rightarrow\ f'(x)\ \rightarrow\ f''(x)\ \ (\rightarrow\text{의 방향으로 미분})$$

일 때, $f'(x)$은 함수 $f(x)$에 대한 도함수인 동시에, 함수 $\int_a^x f(t)dt$에 대한 이계도함수임을 알아야 한다.

이와 관련된 평가원 기출문제는 여럿 있으니, 스스로 찾아볼 것을 권한다.

2017학년도 가형 21번	이동훈 기출문제집 H048 (2016-A형29) 이동훈 기출문제집 H038 (2009(9)-가형10) 이동훈 기출문제집 L023 (2010(9)-가형28)
닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 $\int_0^1 f(x)dx=2$, $\int_0^1 \lvert f(x)\rvert dx=2\sqrt{2}$ 를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가 $F(x)=\int_0^x \lvert f(t)\rvert dt\,(0\le x\le 1)$ 일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은? [4점] (2017-가형21) ① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$ ④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$	이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다. (가) $\int_0^2 \lvert f(x)\rvert dx=-\int_0^2 f(x)dx=4$ (나) $\int_2^3 \lvert f(x)\rvert dx=\int_2^3 f(x)dx$ $f(5)$의 값을 구하시오. [4점] + 함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<1)\\ -x+2 & (x\ge 1)\end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{-1}^x (t-1)f(t)dt$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 증가한다. ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재한다. ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ + 함수 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}dt$에 대하여 상수 a가 $f(a)=\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx$의 값은? [3점] ① $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$ ② $\sqrt{e}-1$ ③ 1 ④ $\frac{\sqrt{e}+1}{2}$ ⑤ $\sqrt{e}+1$

[풀이] (풀이의 일부)

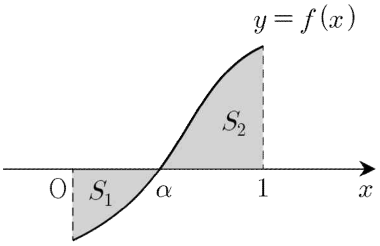
닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x) \le 0$이면

$\int_0^1 f(x)dx \le 0$이므로 문제에서 주어진 조건에 모순이다.

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x) > 0$이면

$\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 f(x)dx$이므로 문제에서 주어진 조건에 모순이다.

따라서 사이값 정리에 의하여 $f(\alpha)=0$인 α가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. 그런데 $f(x)$는 증가함수이므로 α의 값을 유일하게 결정된다.



[풀이] (풀이의 일부)

조건 (가), (나)에서 정적분의 성질에 의하여

$$\int_0^3 |f(x)|dx$$

$$= \int_0^2 |f(x)|dx + \int_2^3 |f(x)|dx$$

$$= -\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \qquad \cdots (\star)$$

구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x) \ge 0$이라고 가정하자.

$(\star)$은

$$\int_0^3 f(x)dx = -\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

정리하면

$$\int_0^2 f(x)dx = 0$$

구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)=0$이어야 한다.

$f(x)$는 이차함수이므로 이는 가정에 모순이다.

구간 $[0,\ 3]$에서 $f(x) \le 0$이라고 가정하자.

$(\star)$은

$$-\int_0^3 f(x)dx = -\int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

정리하면

$$\int_2^3 f(x)dx = 0$$

구간 $[2,\ 3]$에서 $f(x)=0$이어야 한다.

$f(x)$는 이차함수이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 구간 $(0,\ 3)$에 속하는 α에 대하여 두 구간 $(0,\ \alpha)$와 $(\alpha,\ 3)$에서의 이차함수 $f(x)$의 부호는 각각 양, 음 혹은 음, 양이어야 한다.

이차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

사이값 정리에 의하여 $f(\alpha)=0$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=kx(x-\alpha)$ (단, $k \ne 0$, $0<\alpha<3$)

☀ 문제에서 주어진 정적분 식에서 사이값 정리를 이용하여 $f(x)$의 그래프의 개형을 결정한다.

함수 $F(x)$는

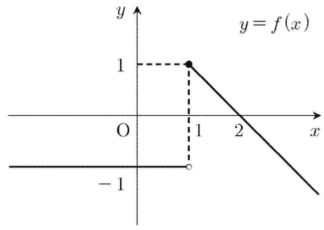
$F(x)=\int_0^x |f(t)|dt\,(0\le x\le 1)$ $\cdots(\star)$

적분과 미분의 관계에 의하여

$F'(x)=|f(x)|=\begin{cases}-f(x) & (0\le x\le \alpha)\\ f(x) & (\alpha<x\le 1)\end{cases}$

[풀이] (풀이의 일부)

함수 $f(x)$의 그래프는



ㄱ. (참)

적분과 미분의 관계에 의하여

$g'(x)=(x-1)f(x)$

구간 $(1,\ 2)$에서 $x-1>0,\ f(x)>0$

이므로 $g'(x)>0$이다.

구간 $(1,\ 2)$에서 함수 $g(x)$는 증가한다.

☀ 정적분으로 정의된 함수에 대하여 적분과 미분의 관계를 적용하여 함수의 방정식을 유도한다.

정적분의 치환적분법에 의하여

$\int_0^1 f(x)F(x)dx$

$=\int_0^\alpha \{-F'(x)F(x)\}dx+\int_\alpha^1 F'(x)F(x)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}(F(x))^2\right]_0^\alpha+\left[\frac{1}{2}(F(x))^2\right]_\alpha^1$

$=\frac{1}{2}(F(0))^2+\frac{1}{2}(F(1))^2-(F(\alpha))^2$ $\cdots$㉠

$(\star)$에 $x=0,\ x=1,\ x=\alpha$를 대입하면

$F(0)=\int_0^0 |f(t)|dt=0$

$F(1)=\int_0^1 |f(t)|dt=2\sqrt{2}$

$F(\alpha)=\int_0^\alpha |f(t)|dt=\sqrt{2}-1$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$\int_0^1 f(x)F(x)dx=1+2\sqrt{2}$

답 ④

[풀이] (풀이의 일부)

적분과 미분의 관계에서

$f'(x)=\frac{1}{1+x^6}$

문제에서 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=\int_0^0 \frac{1}{1+t^6}dt=0$

정적분의 치환적분법에 의하여

$\therefore\ \int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx=\int_0^a f'(x)e^{f(x)}dx$

$=\left[e^{f(x)}\right]_0^a=e^{f(a)}-e^{f(0)}=\sqrt{e}-1$

답 ②

[풀이] (풀이의 일부)

$\int_0^\alpha |f(x)|dx=S_1,\ \int_\alpha^1 |f(x)|dx=S_2$로 두자.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^1 f(x)dx$

$=-S_1+S_2=2$

$\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^\alpha |f(x)|dx+\int_\alpha^1 |f(x)|dx$

$=S_1+S_2=2\sqrt{2}$

$S_1,\ S_2$에 대한 연립방정식을 풀면

$S_1=\sqrt{2}-1,\ S_2=\sqrt{2}+1$

☀ 정적분의 계산에서 도함수가 곱해져있다면 치환적분을 의심하고, 계산해 본다.

(왼쪽) $f(x)F(x)$

(오른쪽) $f'(x)e^{f(x)}$

2017학년도 수능 가형 분석

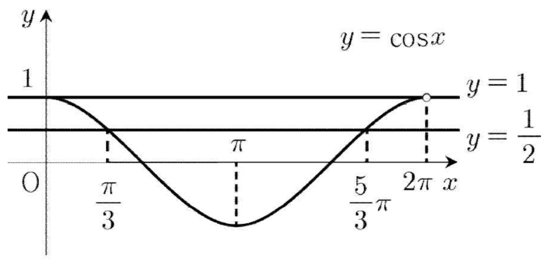
2017학년도 가형 22번	이동훈 기출문제집 M110 (2012-가형22)
${}_4\mathrm{H}_2$의 값을 구하시오. [3점] (2017-가형22)	자연수 r에 대하여 ${}_3\mathrm{H}_r={}_7\mathrm{C}_2$일 때, ${}_5\mathrm{H}_r$의 값을 구하시오. [3점]
[풀이] 중복조합의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{1\times2}=10$ 답 10	[풀이] ${}_3\mathrm{H}_r={}_{3+r-1}\mathrm{C}_r={}_{r+2}\mathrm{C}_r={}_{r+2}\mathrm{C}_2$이므로 주어진 등식은 ${}_{r+2}\mathrm{C}_2={}_7\mathrm{C}_2$ $\dfrac{(r+2)(r+1)}{2}=21$ 정리하면 $r^2+3r-40=0$ 좌변을 인수분해하면 $(r-5)(r+8)=0$ $r>0$이므로 $r=5$ $\therefore\ {}_5\mathrm{H}_5={}_{5+5-1}\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=126$ 답 126
☀ 중복조합에 대한 교과서 예제 수준의 문제	

2017학년도 가형 23번	이동훈 기출문제집 I113 (2015-A형15)
부등식 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5}\geq4$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점] (2017-가형23)	부등식 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1-2x}\leq5^{x+4}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [4점] ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15
[풀이] 지수법칙에 의하여 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-5}=2^{5-x}$, $4=2^2$이므로 문제에서 주어진 부등식은 $2^{5-x}\geq2^2$ 밑이 1 보다 크므로 $5-x\geq2$ 부등식을 풀면 $x\leq3$ x는 자연수이므로 문제에서 주어진 부등식의 해집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 따라서 구하는 값은 6이다. 답 6	[풀이] 지수법칙에 의하여 $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1-2x}=5^{2x-1}$ 주어진 부등식은 $5^{2x-1}\leq5^{x+4}$ 밑이 1보다 크므로 $2x-1\leq x+4$ 풀면 $x\leq5$ 따라서 구하는 값은 $1+2+3+4+5=15$ 답 ⑤
☀ 지수부등식에 대한 교과서 예제 수준의 문제	

2017학년도 수능 가형 분석

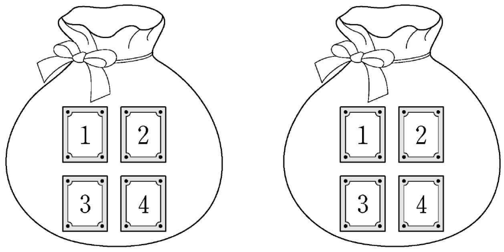
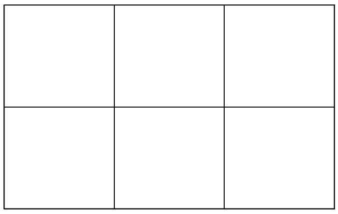
2017학년도 가형 24번	이동훈 기출문제집 T027 (1999-자연25)
좌표공간에서 평면 $x+8y-4z+k=0$이 구 $x^2+y^2+z^2+2y-3=0$에 접하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. [3점] (2017-가형24)	좌표공간에서 중심이 $(1,\ 1,\ 1)$이고 평면 $x+2y-2z=31$에 접하는 구의 반지름을 구하시오. [3점]
[풀이] 문제에서 주어진 평면과 구를 각각 α, S라고 하자. 구 S의 방정식을 정리하면 S: $x^2+(y+1)^2+z^2=4$ 구 S의 중심을 C, 반지름의 길이를 r이라고 하면 $\mathrm{C}(0,\ -1,\ 0)$, $r=2$ 평면 α가 구 S에 접하므로 (점 C에서 평면 α까지의 거리)$=r$ 점과 평면 사이의 거리 공식에 의하여 $\dfrac{\lvert 0+8\times(-1)-4\times 0+k\rvert}{\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}}=2$ 정리하면 $\lvert k-8\rvert=18$ 이므로 $k-8=18$ 또는 $k-8=-18$ 풀면 $k=26$ 또는 $k=-10$ 따라서 구하는 값은 16이다. 답 16	[풀이1] 주어진 구의 반지름의 길이를 r, 주어진 구의 중심에서 주어진 평면까지의 거리를 d라고 하자. 점과 평면 사이의 거리 공식에 의하여 $d=\dfrac{\lvert 1+2\times 1-2\times 1-31\rvert}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=10$ $r=d$이면 주어진 구는 주어진 평면에 접한다. $\therefore\ r=10$ 답 10
☀ 평면-구의 위치 관계에 대한 전형적인 문제. 수능에서 지속적으로 출제되는 주제이기도 하다.	

2017학년도 수능 가형 분석

<table>
<tr><th>2017학년도 가형 25번</th><th>이동훈 기출문제집 J052 (2017(9)-가형7)</th></tr>
<tr><td>$0 < x < 2\pi$일 때, 방정식 $\cos^2 x - \sin x = 1$의 모든 실근의 합은 $\dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [3점] (2017-가형25)</td><td>$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식
$$2\sin^2 x + 3\cos x = 3$$
의 모든 해의 합은? [3점]
① $\dfrac{\pi}{2}$ ② π ③ $\dfrac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\dfrac{5\pi}{2}$</td></tr>
<tr><td>[풀이]
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$이므로 주어진 방정식은
$\sin^2 x + \sin x = 0$
좌변을 인수분해하면
$\sin x(\sin x + 1) = 0$
풀면
$\sin x = 0$ 또는 $\sin x = -1$
$\sin x = 0$이면 $x = \pi$
$\sin x = -1$이면 $x = \dfrac{3}{2}\pi$
$\dfrac{q}{p}\pi = \pi + \dfrac{3}{2}\pi = \dfrac{5}{2}\pi$에서 $p=2$, $q=5$
$\therefore\ p+q=7$
답 7</td><td>[풀이]
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$이므로 주어진 방정식은
$2(1-\cos^2 x) + 3\cos x = 3$
정리하면
$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$
좌변을 인수분해하면
$(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$
풀면
$\cos x = \dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x = 1$


$\cos x = \dfrac{1}{2}$이면 $x = \dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x = \dfrac{5}{3}\pi$
$\cos x = 1$이면 $x = 0$
따라서 구하는 값은
$0 + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{5}{3}\pi = 2\pi$
답 ④</td></tr>
<tr><td colspan="2">☀ 삼각방정식에 대한 교과서 예제 수준의 전형적인 문제. 2017학년도 9월 가형 7번, 2017학년도 가형 25번 모두 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$을 이용하고 있다.</td></tr>
</table>

2017학년도 수능 가형 분석

<table>
<tr><th>2017학년도 가형 26번</th><th>이동훈 기출문제집 M018 (2005(예비)-나형30)
이동훈 기출문제집 N115 (2006(9)-가형27확률통계)</th></tr>
<tr><td>두 주머니 A와 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A에서, 을은 주머니 B에서 각자 임의로 두 장의 카드를 꺼내어 가진다. 갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점] (2017-가형26)

A B</td><td>그림과 같이 여섯 칸으로 나누어진 직사각형의 각 칸에 6개의 수 1, 2, 4, 6, 8, 9를 한 개씩 써 넣으려고 한다. 각 가로줄에 있는 세 수의 합이 서로 같은 경우의 수를 구하시오. [3점]


주머니 A에는 1부터 10까지의 숫자가 적힌 10개의 구슬이 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 8까지의 숫자가 적힌 8개의 구슬이 들어 있다. 다음 각 경우의 확률을 비교하고자 한다.
(가) 주머니 A에서 구슬을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 차례로 1, 2가 적힌 구슬이 나오는 경우 (단, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.)
(나) 주머니 B에서 임의로 3개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 1, 2, 3이 적힌 구슬이 나오는 경우
(다) 각 주머니에서 구슬을 임의로 한 개씩 꺼낼 때, 모두 1이 적힌 구슬이 나오는 경우
(가), (나), (다) 각 경우의 확률을 차례로 p, q, r이라 할 때, p, q, r의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? (단, 모든 구슬은 크기와 모양이 같다고 한다.) [3점]
① $p<q<r$ ② $p<r<q$ ③ $q<p<r$
④ $r<p<q$ ⑤ $r<q<p$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

[풀이]
1, 2, 3, 4에서 서로 다른 두 개의 숫자를 선택하여 더할 때, 나올 수 있는 값을 모두 쓰면 다음과 같다. 이때, 가장 작은 값은 $3(=1+2)$이고, 가장 큰 값은 $7(=3+4)$이다.
$3=1+2$, $4=1+3$, $5=1+4=2+3$, $6=2+4$, $7=3+4$
갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합을 a, 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합을 b라고 하자.

</td><td>

[풀이] (풀이의 일부)
문제에서 주어진 6개의 수에 대하여
$\dfrac{1+2+4+6+8+9}{2}=15$
이므로 위, 아래의 가로줄에 있는 세 수의 합이 각각 15이면 된다.
$1+6+8=15$, $2+4+9=15$
이므로 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
구하는 경우의 수는 $2\times{}_3\mathrm{P}_3\times{}_3\mathrm{P}_3=72$이다.
답 72

</td></tr>
<tr><td colspan="2">☀ 두 수의 합이 같은 경우에 대한 문제는 2005학년도 예비시행 나형 30번에서 출제된 바 있다.</td></tr>
<tr><td>

(1) $a=b=3$인 경우
갑이 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드를 꺼낼 확률은
수학적 확률의 정의에 의하여
$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{6}$
을이 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드를 꺼낼 확률은
수학적 확률의 정의에 의하여
$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{6}$

</td><td>

[풀이] (풀이의 일부)
(나) 주머니 B에서 3개의 구슬을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_3$이고, 1, 2, 3이 적힌 구슬을 꺼내는 경우의 수는 1이므로
수학적 확률의 정의에 의하여
$q=\dfrac{1}{{}_8\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{56}$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">☀ 2006학년도 9월 가형 27번의 (나): 주머니에서 특정한 조건을 만족시키는 구슬을 꺼내는 확률을 수학적 확률로 계산한다.</td></tr>
<tr><td>

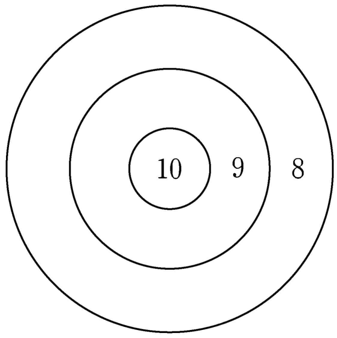
이 경우의 확률은 확률의 곱셈정리에 의하여
$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$
구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여
$\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{2}{9}$
$p=9$, $q=2$
$\therefore\ p+q=11$
답 11

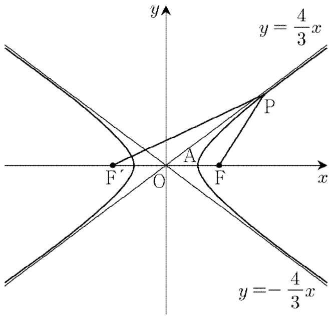
</td><td>

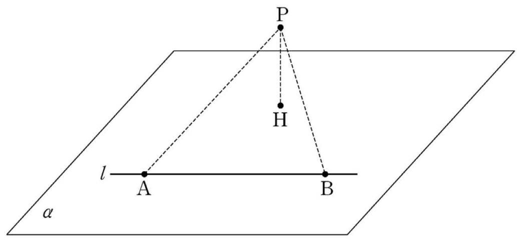
(다) 주머니 A에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 1인 사건을 C, 주머니 B에서 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 1인 사건을 D라고 하자. 이때, 두 사건 C와 D는 서로 독립이다.
확률의 곱셈정리에 의하여
$r=\mathrm{P}(C)\mathrm{P}(D)=\dfrac{1}{10}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{80}$
$\therefore\ p<r<q$
답 ②

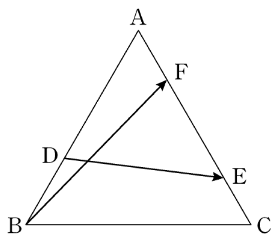
</td></tr>
<tr><td colspan="2">☀ 2006학년도 9월 가형 27번의 (다): 두 주머니에서 특정한 조건을 만족시키는 구슬을 각각 꺼내는 확률을 확률의 곱셈정리를 이용하여 계산한다.
2017학년도 가형 26번은 2005학년도 예비시행 나형 30번과 2006학년도 9월 가형 27번을 물리적으로 결합시킨 문제라고 보아도 좋다.</td></tr>
</table>

2017학년도 수능 가형 분석

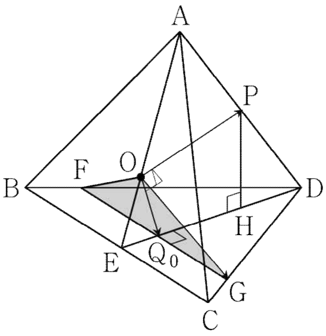
2017학년도 가형27번/나형27번	이동훈 기출문제집 M103 (2008(9)-가형28이산수학)
다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오. [4점] (2017-가형27/나형27) (가) $a+b+c=7$ (나) $2^a\times4^b$은 8의 배수이다.	점수가 표시된 그림과 같은 과녁에 6개의 화살을 쏘아 점수를 얻는 경기가 있다. 6개의 화살을 모두 과녁에 맞혔을 때, 점수의 합계가 51점 이상이 되는 경우의 수는? (단, 화살이 과녁의 경계에 맞는 경우는 없다.) [3점]  ① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27
[풀이1] (풀이의 일부) 지수법칙에 의하여 $2^a\times4^b=2^a\times2^{2b}=2^{a+2b}$ 조건 (나)에 의하여 2^{a+2b}은 8의 배수이므로 $a+2b\geq3$ 이제 a, b, c에 대한 식을 모두 쓰면 $a+b+c=7$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$) …㉠ $a+2b\geq3$ …㉡ ㉠을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=\dfrac{9\times8}{1\times2}=36$	[풀이1] (풀이의 일부) 8점에 x개, 9점에 y개, 10점에 z개의 화살을 맞혔다면 $x+y+z=6\,(x\geq0,\ y\geq0,\ z\geq0)$ 이 방정식의 해는 서로 다른 3개의 문자에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다. ${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$
☀ 문제에서 주어진 상황을 부등식으로 나타내고, 중복조합의 수로 전체집합의 원소의 개수를 구한다.	
㉠은 만족시키지만, ㉡을 만족시키지 않는 즉, $a+2b<3$인 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(2,\ 0,\ 5)$, $(1,\ 0,\ 6)$, $(0,\ 1,\ 6)$, $(0,\ 0,\ 7)$ 이므로 구하는 경우의 수는 $36-4=32$ 답 32	이 중에서 점수의 합이 50점 이하인 경우의 수는 4이다. (아래) $48=8+8+8+8+8+8$ $49=9+8+8+8+8+8$ $50=9+9+8+8+8+8=10+8+8+8+8+8$ 따라서 구하는 경우의 수는 $28-4=24$ 답 ④
☀ 문제의 조건을 만족시키지 않는 즉, 여집합의 원소를 개수를 구해서 답을 유도한다. 10년 전에 출제된 문제라도 현재 교육과정 안에 있다면 반드시 풀어야 한다는 좋은 예이다. (심지어 2017학년도 공통 27번의 원본 문항은 이산수학에 속했었다.)	

2017학년도 가형 28번	이동훈 기출문제집 Q040 (2005(9)-가형5)
점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이고 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\,(c>0)$인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다. (가) 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}'}=30$, $16\le\overline{\mathrm{PF}}\le 20$이다. (나) x좌표가 양수인 꼭짓점 A에 대하여 선분 AF의 길이는 자연수이다. 이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. [4점] (2017-가형 28)	두 초점을 공유하는 타원 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$과 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선의 한 점근선이 $y=\sqrt{35}\,x$일 때, 이 쌍곡선의 두 꼭짓점 사이의 거리는? [3점] ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$ + 구간에 속하는 자연수의 결정
[풀이] (풀이의 일부) 주어진 쌍곡선의 두 초점이 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을 다음과 같이 두자. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0$, $b>0$) 이 쌍곡선의 점근선의 방정식을 유도하면 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$에서 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 문제에서 주어진 조건에 의하여 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$이므로 $a=3k$, $b=4k$로 두자. (단, $k>0$)  쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{(3k)^2}-\frac{y^2}{(4k)^2}=1$ …㉠ 쌍곡선의 초점 F에 대하여 $c=\sqrt{a^2+b^2}=5k$ ㉠에 $y=0$을 대입하여 점 A의 좌표를 구하면 $\mathrm{A}(3k,\ 0)$ 조건 (나)에 의하여 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{OF}}-\overline{\mathrm{OA}}=5k-3k=2k=$(자연수) …㉡ 쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=$(주축의 길이)$=6k$이므로 $\overline{\mathrm{PF}}=30-6k$ 조건 (가)에 의하여 $16\le 30-6k\le 20$ 정리하면 $\frac{10}{3}\le 2k\le\frac{14}{3}$ ㉡에서 $2k$는 자연수이므로 $2k=4$ 즉, $k=2$ 쌍곡선의 주축의 길이는 $\therefore\ 6k=12$ 답 12	[풀이] (풀이의 일부) 주어진 타원의 두 초점을 각각 F, F′이라고 하면 $\mathrm{F}(\sqrt{5^2-4^2},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{5^2-4^2},\ 0)$ 즉, $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$ 주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0$, $b>0$) 점 F가 쌍곡선의 한 초점이므로 $\sqrt{a^2+b^2}=3$ …㉠ 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y=\frac{b}{a}x$ 또는 $y=-\frac{b}{a}x$ 주어진 조건에서 $\frac{b}{a}=\sqrt{35}$ …㉡ ㉠과 ㉡을 연립하면 $a=\frac{1}{2}$ 따라서 쌍곡선의 두 꼭짓점 사이의 거리는 $2a=1$ 답 ④
☀ 2005학년도 9월 가형 5번에서는 '초점과 점근선이 주어졌을 때, 쌍곡선의 방정식이 결정된다.'를 소재로 하는 문제가 출제되었는데, 이번 수능에서 이 문제가 다시 출제된 것이다. 난이도를 높이기 위하여 '구간에 속하는 정수를 결정하기'가 내적 결합되었다. 평가원이 새로운 문제를 만드는 방식 중의 하나이다.	

<table>
<tr><th>2017학년도 가형 29번</th><th>이동훈 기출문제집 S018 (2015-B형12)
이동훈 기출문제집 R025 (2014(9)-B형11)
이동훈 기출문제집 S011 (2009(9)-가형12)</th></tr>
<tr><td>한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점] (2017-가형29)</td>
<td>평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선을 l이라 하고, 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{AB}=\overline{PA}=\overline{PB}=6$, $\overline{PH}=4$일 때, 점 H와 직선 l 사이의 거리는? [3점]


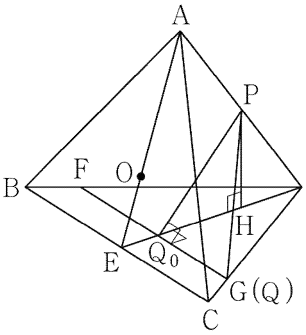
① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$
⇩
한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3 : 1과 1 : 3으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2$의 값은? [3점]


① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21
+
중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구에 내접하는 정사면체 ABCD가 있다. 두 삼각형 BCD, ACD의 무게중심을 각각 F, G라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]
ㄱ. 직선 AF와 직선 BG는 꼬인 위치에 있다.
ㄴ. 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 보다 작다.
ㄷ. $\angle AOG=\theta$일 때, $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
[풀이1] (풀이의 일부)
선분 BC의 중점을 E, 점 P에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 이때, 선분 PH는 평면 BCD에 수직이다.


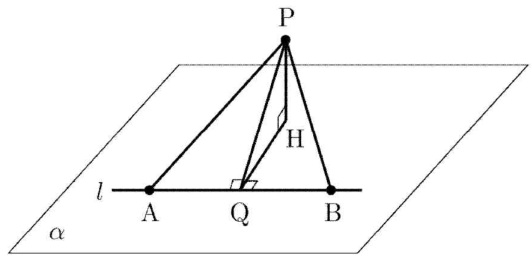
○ 점 O를 지나고 직선 OP에 수직인 평면을 찾자.
문제에서 주어진 조건에 의하여
$\overline{OP} \perp \overline{OQ}$
이므로 직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
점 Q는 점 O를 지나고 직선 OP에 수직인 평면 위에 있다.
이때, 이 평면을 α라고 하자.
$\overline{OP} \perp \overline{OF}$가 되도록 선분 BD 위에 점 F를 잡고,
$\overline{OP} \perp \overline{OG}$가 되도록 선분 CD 위에 점 G를 잡자.
직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
평면 OFG는 직선 OP에 수직이므로
평면 OFG는 평면 α이다.
○ 두 직선 BC, FG가 서로 평행함을 보이자.
$\overline{BC} \perp \overline{EA}$, $\overline{BC} \perp \overline{ED}$
이므로 직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
$\overline{BC} \perp AED$
평면 AED에 포함된 직선 OP에 대하여
직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
$\overline{OP} \perp \overline{BC}$이므로 $\overline{BC} // \alpha$
평면 α와 평면 BCD의 교선 FG에 대하여
$\overline{BC} // \overline{FG}$
두 선분 DE와 FG의 교점을 Q_0이라고 하면
$\overline{HQ_0} \perp \overline{Q_0G}$ 즉, $\angle HQ_0G = \dfrac{\pi}{2}$
</td>
<td>
교과서의 평면과 직선의 수직에 대한 정의
+
교과서 평면과 직선의 수직에 대한 정의와 관련된 예제
(직선 l과 평면 α가 평행하면, 직선 l을 포함하는 평면 β와 평면 α의 교선 m은 직선 l과 평행하다.)
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">☀ 이 문제의 풀이의 초반부를 엄격하게 서술하면 위와 같다. 교과서의 ‘직선과 평면의 수직 조건’과 교과서 예제의 명제가 풀이에서 사용되었다.</td>
</tr>
</table>

○ 점 Q가 점 G(혹은 점 F)에 오면 선분 PQ의 길이가 최대가 됨을 보이자.
점 Q는 평면 α와 평면 BCD의 교선 FG 위에 있다.
그런데 점 Q는 삼각형 BCD의 내부 혹은 경계 위에 있으므로
점 Q는 선분 FG 위에 있다.



$\overline{PH} \perp BCD$, $\overline{HQ_0} \perp \overline{FG}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{PQ_0} \perp \overline{FG}$
직각삼각형 PHQ_0에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{PQ_0}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HQ_0}^2$
직각삼각형 PQ_0Q에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{PQ}^2 = \overline{PQ_0}^2 + \overline{Q_0Q}^2$
위의 두 등식에서 아래의 등식을 얻는다.
$\overline{PQ}^2 = \overline{PH}^2 + \overline{HQ_0}^2 + \overline{Q_0Q}^2$
(이는 $\overline{PH}$, $\overline{HQ_0}$, $\overline{Q_0Q}$를 각각 세 모서리로 하는 직육면체의 대각선의 길이를 구하는 식이다.)
두 선분 PH, HQ_0의 길이는 일정하므로
선분 Q_0Q의 길이가 최대일 때, 선분 PQ의 길이는 최대가 된다.
다시 말하면 점 Q가 점 G(혹은 점 F) 위에 올 때,
선분 PQ의 길이는 최대가 된다.

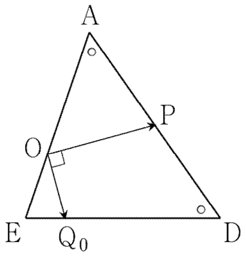
[풀이1] (풀이의 일부)



점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 H이므로
$\overline{PH} \perp \alpha$
점 H에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q라고 하면
$\overline{HQ} \perp l$
삼수선의 정리에 의하여
$\overline{PQ} \perp l$
△ABP는 정삼각형이므로 점 Q는 선분 AB의 중점이다.
직각삼각형 PAQ에서 특수각의 삼각비에 의하여
$\overline{PQ} = \overline{AQ} \times \tan\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$
직각삼각형 PQH에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{HQ} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{11}$
따라서 점 H와 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{11}$이다.
답 ①

☀ 공간에서 점(P)과 직선(l) 위의 점(Q) 사이의 거리를 구할 때(단, $l \subset$ 평면α), 삼수선의 정리를 쓰는 것을 평가하고 있다. 2015학년도 B형 12번에서 주어진 그림과 2017학년도 가형 29번에서 그리게 되는 그림을 비교해보면 명확하다.

○ 선분 PG의 길이를 구하자.
점 G가 선분 CD의 $t:(1-t)$ 내분점이라고 하면
점 Q_0은 선분 ED의 $t:(1-t)$ 내분점이다.
(단, $0<t<1$)



$\overrightarrow{EA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{ED}=\vec{b}$라고 하면
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2\sqrt{3}$ (∵ 정삼각형의 높이)
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ_0라고 하자.
이면각의 정의에 의하여
두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기는 θ_0이므로

$\cos\theta_0=\dfrac{1}{3}$

벡터의 뺄셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{AD}=\vec{b}-\vec{a}$
벡터의 뺄셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

$=\dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})-\dfrac{2}{3}(-\vec{a})=\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

벡터의 덧셈의 정의에 의하여

$\overrightarrow{OQ_0}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EQ_0}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{ED}$

$=\dfrac{1}{3}(-\vec{a})+t\vec{b}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+t\vec{b}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ_0}=\left(\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\vec{a}+t\vec{b}\right)$

$=-\dfrac{1}{18}|\vec{a}|^2+\dfrac{t-1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{t}{2}|\vec{b}|^2$

$=-\dfrac{1}{18}|\vec{a}|^2+\dfrac{t-1}{6}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta_0+\dfrac{t}{2}|\vec{b}|^2$

$=-\dfrac{1}{18}(2\sqrt{3})^2+\dfrac{t-1}{6}(2\sqrt{3})^2\dfrac{1}{3}+\dfrac{t}{2}(2\sqrt{3})^2$

$=\dfrac{20}{3}t-\dfrac{4}{3}=0$에서 $t=\dfrac{1}{5}$

점 G는 선분 CD의 1:4 내분점이므로

$\overline{Q_0G}=\overline{EC}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{8}{5}$

[풀이1] (풀이의 일부)
$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$로 두자.
벡터의 연산법칙에 의하여

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$=\vec{a}+\dfrac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

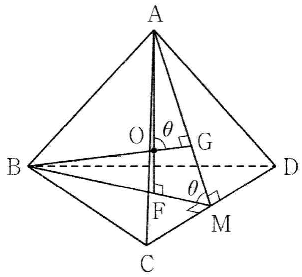
$\therefore\ |\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2=\left|\dfrac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\dfrac{4}{9}|\vec{a}|^2+\dfrac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=\dfrac{4}{9}|\vec{a}|^2+\dfrac{4}{3}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}+|\vec{b}|^2$

$=19$

답 ③

ㄷ. (참) (풀이의 일부)
정사면체 ABCD를 평면 ABM으로 잘라서 생긴 평면도형에서 문제를 해결하자. 이때, 세 점 O, F, G는 평면 ABM 위의 점이다.



$\angle AOG+\angle GOF=\pi$, $\angle GOF+\angle FMG=\pi$
이므로 $\angle FMG=\theta$
$\overline{AM}\perp\overline{CD}$, $\overline{BM}\perp\overline{CD}$
이므로 이면각의 정의에 의하여
두 평면 ACD, BCD가 이루는 각의 크기는 θ이다.
직각삼각형 AMF에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{\overline{FM}}{\overline{AM}}=\dfrac{\frac{1}{3}\overline{BM}}{\overline{AM}}=\dfrac{1}{3}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.
답 ④

☀ 2017학년도 가형 29번에서 주어진 정사면체의 단면을 찾은 후에는, '벡터의 연산의 성질과 내적의 성질'을 이용하여 점 Q의 위치를 결정한다. 이와 유사한 계산 과정이 2014학년도 9월 B형 11번에서 출제된 적이 있다. 그리고 정사면체의 두 면이 이루는 각의 크기가 θ이면 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$임은 2009학년도 9월 가형 12번 보기 ㄷ에서 출제된 바가 있다.

2017학년도 수능 가형 분석

2017학년도 가형 30번	이동훈 기출문제집 G149 (2011(6)-가형12) 이동훈 기출문제집 G120 (2011-가형24) 이동훈 기출문제집 G024 (2001-인문11/자연11) 이동훈 기출문제집 K107 (2016(6)-B형21)
$x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.) (가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다. (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$) (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다. $\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점] (2017-가형30)	서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점] ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다. ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다. ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다. ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⇩ 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를 $S=\{a\|$함수 $\|f(x)-t\|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다. $\}$ 라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점] ⇩ 삼차함수 $y=f(x)$가 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=f'(c)=0$ 을 만족시킨다. c를 a와 b로 나타내면? [2점] ① $a+b$ ② $\frac{a+b}{2}$ ③ $\frac{a+b}{3}$ ④ $\frac{a+2b}{3}$ ⑤ $\frac{2a+b}{3}$ ⇩ 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$ 가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1\le g(n)\le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점] ① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

[풀이2] (풀이의 일부)
조건 (가)에 의하여
$f(x)=\frac{g(x)}{x}$ (단, $x>0$) $\cdots(\star1)$
조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 값 M을 가지므로
$f(\alpha)=f(\beta)=M$ 즉, $M-f(\alpha)=M-f(\beta)=0$
인수정리에 의하여
$M-f(x)$의 분자는 $x-\alpha$와 $x-\beta$를 인수로 가지므로
$M-f(x)=\frac{Mx-g(x)}{x}=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}$
(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이다.)
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}+M$(단, $x>0$)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=-\frac{2x-\alpha-\beta}{x}Q(x)-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x}Q'(x)$
$+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x^2}Q(x)$ $\cdots$㉠
조건 (나)에 의하여
양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가지므로
$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$
이를 ㉠에 대입하면
$f'(\alpha)=-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}Q(\alpha)=0$ 즉, $Q(\alpha)=0$
$f'(\alpha)=-\frac{\beta-\alpha}{\beta}Q(\beta)=0$ 즉, $Q(\beta)=0$
인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=-\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M$(단, $x>0$)$\cdots(\star2)$

[풀이] (풀이의 일부)
※ 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 양수 a로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
함수 $f(x)$의 방정식을
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$
(단, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)
ㄱ. (참)
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=a(x-\beta)g(x)+a(x-\alpha)g(x)$
$+a(x-\alpha)(x-\beta)g'(x)$
주어진 조건에서
$f'(\alpha)=a(\alpha-\beta)g(\alpha)=0$
그런데 $a>0$, $\alpha\neq\beta$이므로
$g(\alpha)=0$
함수 $g(x)$의 방정식을
$g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$
다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다.

☀ 2017학년도 가형 30번은 네 개의 기출문제인
G149 (2011(6)-가형12), G120 (2011-가형24), K107 (2016(6)-B형21), G024 (2001-인문11/자연11)
를 내적 결합한 것으로 볼 수 있다.
2011학년도 6월 가형 12번의 보기 ㄱ: 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$일 때, $f(x)$의 방정식 구하기
2017학년도 가형 30번: 분수함수 $f(x)=\frac{g(x)}{x}$에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)=M$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$일 때, $f(x)$의 방정식 구하기
다항함수에서 분수함수로 함수의 꼴이 바뀌었을 뿐, 위의 풀이처럼 교과서의 전형적인 계산을 하면 된다. 많은 수험생들이 $f(x)=-\frac{(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)}{x}+M$의 식을 세워두고, 더 이상의 계산을 진행시키지 못하였는데, 교과서의 전형적인 풀이에 대한 믿음을 가졌다면 $f(x)$의 방정식을 유도할 수 있었을 것이다.
평가원이 미분법 문제의 난이도를 높이는 방법 중에서는 '낯설거나, 분량이 많은 계산을 넣는 것'이 있는데, 이 문제가 이에 해당한다.
☀ 2011학년도 6월 가형 12번의 보기 ㄱ을 2017학년도 가형 30번에 바로 적용하면
$M-f(x)=\frac{(x-\alpha)^m(x-\beta)^n}{x}$에서 $m=n=2$임을 바로 찾을 수도 있다. 인수정리와 그래프의 개형에 대한 관계에 대한 연구를 충분히 한 이과 수험생의 경우에 이를 간파하여 문제를 안정적으로 해결하였을 것이다.

함수 $f(x)$의 도함수는

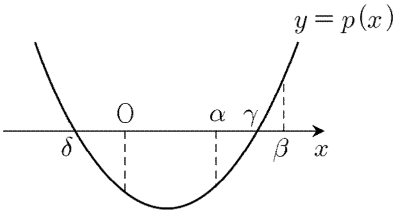
$$f'(x) = -\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta)}{x^2}$$

$p(x)=3x^2-(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$로 두자.

$p(0)=-\alpha\beta<0$, $p(\alpha)=2\alpha(\alpha-\beta)<0$,

$p(\beta)=2\beta(\beta-\alpha)>0$이므로

이차함수 $p(x)$의 그래프는 다음과 같다.



사이값 정리에 의하여

$p(\gamma)=p(\delta)=0$인 γ, δ가 존재한다.

(단, $\alpha<\gamma<\beta$, $\delta<0$)

함수 $f'(x)$의 방정식은

$$f'(x) = -\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}{x^2}$$

$f'(\delta)=0$, $f''(\delta)>0$ (←[참고2])

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\delta$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. (참)

$f'(\alpha)=a(\alpha-\beta)g(\alpha)$

$f'(\beta)=a(\beta-\alpha)g(\beta)$

이므로

$f'(\alpha)f'(\beta)=-a^2(\alpha-\beta)^2g(\alpha)g(\beta)>0$

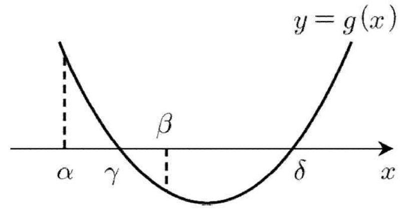
$-a^2(\alpha-\beta)^2<0$이므로 $g(\alpha)g(\beta)<0$

이차함수 $g(x)$는 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고

$g(\alpha)<0$, $g(\beta)>0$ 또는 $g(\alpha)>0$, $g(\beta)<0$

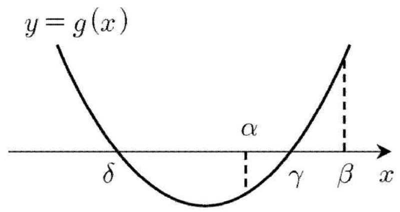
이므로 사이값 정리에 의하여

$g(\gamma)=0$인 γ가 구간 (α, β)에 적어도 하나 존재한다.



위의 그림에서 $g(x)=0$은 γ와 다른 실근을 갖는다.

이때, 또 다른 실근을 δ라고 하자.



위의 그림에서 $g(x)=0$은 γ와 다른 실근을 갖는다.

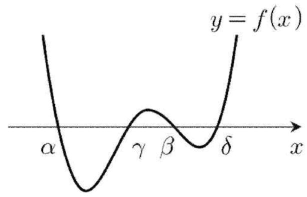
이때, 또 다른 실근을 δ라고 하자.

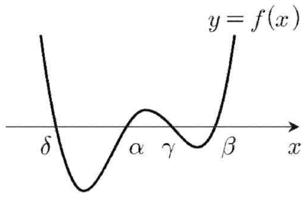
방정식 $f(x)=0$의 해집합은

$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

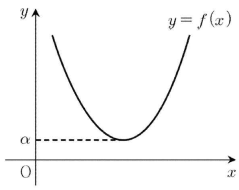


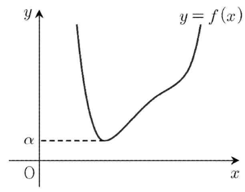


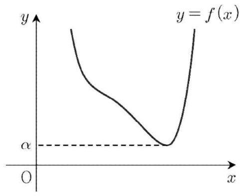
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

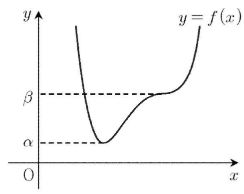
답 ⑤

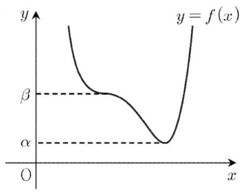
☀ 사이값 정리에 의하여 $f(x)$가 극값을 갖는 점의 개수를 구한다. 함수만 다항함수에서 분수함수로 바뀌었을 뿐, 교과서의 전형적인 풀이를 적용하면 된다.

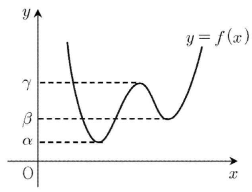
<table>
<tr>
<td>함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 3이므로 사차함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 1이다.</td>
<td>
[풀이] (풀이의 일부)
○ 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은


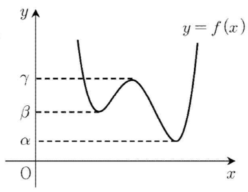


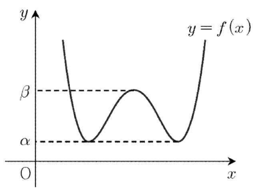


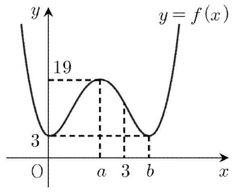
○ 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은




○ 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우
함수 $f(x)$의 그래프의 개형은




함수 $f(x)$의 그래프의 개형은


$f(0)=3$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는


</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">☀ 사차함수의 그래프의 개형을 반드시 알아야 풀 수 있는 문제가 수능에 처음 출제된 것은 2011학년도 가형 24번이다. 2017학년도 가형 30번에서도 4차함수의 그래프의 개형을 묻고 있으며, 특히 극댓값과 극솟값을 동시에 갖는 경우와 그렇지 않은 경우를 구분할 수 있는가도 평가하고 있다.</td>
</tr>
</table>

$(\star 1)$, $(\star 2)$에 의하여

$$\frac{g(x)}{x}=-\frac{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}{x}+M(\text{단, } x>0)$$

정리하면

$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+Mx$

함수 $g(x)$의 도함수는

$$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+M$$

계산을 줄이기 위하여 함수 $g(x)$의 그래프를

x축의 방향으로 $-\frac{\alpha+\beta}{2}$만큼 평행이동시켜서

함수 $h(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.

함수 $g(x)$가 극대점만을 가지므로

함수 $h(x)$도 극대점만을 가지면 된다.

함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=-4x\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+M$$

$=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$

$(\because \beta-\alpha=6\sqrt{3})$

[참고] (풀이의 일부)

문제에서 주어진 조건에서 $f(a)=f'(a)=0$이므로

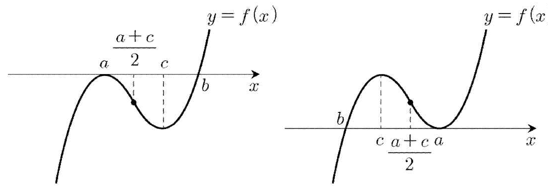
함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(a,\ 0)$에서 x축에 접한다.

문제에서 주어진 조건에서 $f(b)=0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(b,\ 0)$에서 x축과 만난다.

문제에서 주어진 조건에서 $f'(a)=f'(c)=0$이므로

함수 $f(x)$의 두 극점은 각각 $(a,\ f(a))$, $(c,\ f(c))$이다.



삼차함수 $f(x)$의 그래프는 두 극점의 중점에 대하여 대칭인데, 대칭점 $\left(\frac{a+c}{2},\ f\left(\frac{a+c}{2}\right)\right)$가 원점이 되도록

함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 양의 방향으로 $-\frac{a+c}{2}$ 만큼 평행이동시켜서 얻은 곡선을 $y=g(x)$라고 하자.

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근은 각각 a, a, b이므로

삼차방정식 $g(x)=0$의 세 근은 각각

$a-\frac{a+c}{2}$, $a-\frac{a+c}{2}$, $b-\frac{a+c}{2}$이다.

함수 $g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)$의 방정식을 다음과 같이 둘 수 있다.

$g(x)=x^3-px$ (단, $p>0$)

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

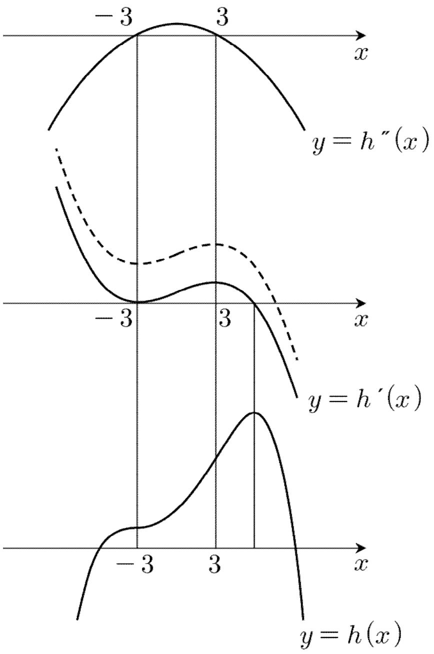
$$\left(a-\frac{a+c}{2}\right)+\left(a-\frac{a+c}{2}\right)+\left(b-\frac{a+c}{2}\right)=0$$

정리하면

$$\therefore\ c=\frac{a+2b}{3}$$

☀ '삼차함수가 변곡점에 대하여 대칭이다.'를 증명하기 위해서는 삼차함수의 변곡점을 원점으로 평행이동시켜야 한다. 2017학년도 가형 30번에서는 이에 대한 관점을 묻고 있으며, 2001학년도 공통 11번도 이 관점에서 생각해볼 수 있다.

함수 $h(x)$의 이계도함수는
$h''(x)=-12(x+3)(x-3)$
$h''(x)=0$이면 $x=-3$ 또는 $x=3$
$x=-3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=-3$에서 극솟값을 갖는다.
$x=3$의 좌우에서 $h''(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $h'(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.
조건 (다)를 만족시키는 세 함수
$h(x)$, $h'(x)$, $h''(x)$
의 그래프는 다음과 같다.



함수 $h(x)$가 극대점만을 가지기 위해서는
$h'(-3)=-216+M\geq 0$
$\therefore\ M\geq 216$
답 216

[풀이] (풀이의 일부)
함수 $f(x)$가 역함수를 가져야 하므로
함수 $f(x)$는 증가함수 혹은 감소함수이다.
함수의 극한에 대한 성질에 의하여

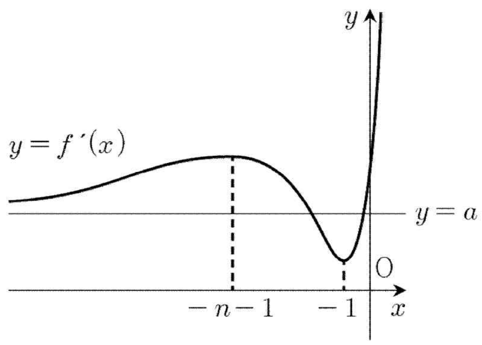
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{x+1}x^2\left(1+\frac{n-2}{x}-\frac{n-3}{x^2}+\frac{a}{xe^{x+1}}\right)=\infty$$

이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$
함수 $f(x)$의 이계도함수는
$f''(x)=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$
$=e^{x+1}(x+n+1)(x+1)$
$f''(x)=0$이면 $x=-n-1$ 또는 $x=-1$

x	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t^2-nt+1}{e^{t-1}}+a\right)=a$$

함수 $f'(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$가 증가함수이므로
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.
(함수 $f'(x)$의 극솟값)
$=f'(-1)=2-n+a\geq 0$
즉, $a\geq n-2$이므로 $g(n)=n-2$이다.
주어진 부등식은 $1\leq n-2\leq 8$
풀면 $3\leq n\leq 10$
등차수열의 합의 공식에 의하여
구하는 값은 $\dfrac{3+10}{2}\times 8=52$ 답 ④

☀ 2017학년도 가형 30번 풀이의 마지막 단계는 2016학년도 6월 B형 21번과 동일한 과정을 거치면 된다. 초월함수에서 다항함수로 바뀌었을 뿐이다.